THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ
(Troisième cycle de mécanique des solides)

par

Jacques GARNIER
Ingénieur E. T. P.

SUJET

Tassement et contraintes Influence de la rigidité de la fondation et de l'anisotropie du massif

Soutenue le 15 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

M. J. KRAVTCHENKO	Président
M. L. SANTON M. P. ANGLES D'AURIAC M. J.P. GIROUD	Examinateurs
M. E. ABSI	Invité

GRENOBLE

N° d'ordre

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ
(Troisième cycle de mécanique des solides)

par

Jacques GARNIER
Ingénieur E.T.P.

SUJET

Tassement et contraintes Influence de la rigidité de la fondation et de l'anisotropie du massif

Soutenue le 15 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

M. J. KRAVTCHENKO	Président
M. L. SANTON M. P. ANGLES D'AURIAC M. J.P. GIROUD	Examinateurs
M. E. ABSI	Invité

GRENOBLE

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

à mes parents

AVANT-PROPOS

Les travaux dont les résultats sont exposés dans le présent mémoire ont été réalisés à l'Institut de Mécanique de Grenoble.

Que ceux dont la contribution m'a permis de mener à bien cette étude, trouvent ici l'expression de ma gratitude :

Monsieur le Professeur KRAVTCHENKO, qui a bien voulu accepter la présidence du Jury de Thèse ;

Messieurs les Professeurs SANTON et ANGLES D'AURIAC qui m'ont dispensé leur enseignement dans le cadre du Laboratoire ;

Monsieur GIROUD qui est à l'origine de ce travail et dont les conseils me furent utiles ;

Monsieur ABSI, Délégué Général Scientifique du C.E.B.T.P., qui m'a communiqué les résultats de ses recherches personnelles sur les fondations rigides et qui a bien voulu figurer parmi les membres du Jury ;

Enfin, Mademoiselle SOLARO et Messieurs DIOT et BRAULT qui ont assuré la dactylographie et la reprographie de cet ouvrage.

-ooo$ooo-

-ooooO$Oooo-

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534909_0036

"Aedificia quae plano pede instituuntur, si fundamenta eorum facta fuerint ita, ut est expositum, ad vetustatem ea erunt sine dubitatione firma".

Vitruvius
De l'Architecture (27 Av. J.C.)
L. VI, Ch. VIII

"Les édifices que nous éleverons résisteront au temps, si leurs fondations sont construites selon les règles".

SOMMAIRE

1ère Partie

Fondations rectangulaires rigides

Page

INTRODUCTION 2

1. - FONDATIONS SOUPLES OU FONDATIONS RIGIDES 3

2. - METHODE DE CALCUL 5
- 2.1. Définition de la fondation et de la charge..... 5
  - 2.1.1. La fondation 5
  - 2.1.2. La charge 7
- 2.2. Travaux antérieurs. Nécéssité d'une autre approche ... 8
- 2.3. Calcul par intégration numérique 10
- 2.4. Résolution 12
  - 2.4.1. Charge centrée 12
  - 2.4.2. Moments 12

3. - TASSEMENTS ET ROTATIONS 13
- 3.1. Résultats ABSI (Intégration numérique) 13
- 3.2. Résultats GORBUNOV-POSSADOV et GIROUD 14

4. - DISTRIBUTION DES REACTIONS DU SOL 16
- 4.1. Résultats ABSI. Distribution discontinue 16
- 4.2. Méthode de calcul de la distribution continue 21
  - 4.2.1. Charge centrée 21
  - 4.2.2. Moment M_y 24
    - a - courbe P_y (x) 26
    - b - courbe P_x (y) 27
  - 4.2.3. Moment M_x 27

4.3. Discussion des résultats 28
4.3.1. Influence du découpage 28
4.3.2. Comparaison du cas $\alpha = 10$ et de la bande infinie (analytique) 28
4.4. Considérations sur les sols réels 40
4.4.1. Mesures de réactions 40
4.4.2. Travaux de SCHULTZE 44

5. - CONTRAINTES AU SEIN DU MASSIF 49
5.1. Méthode de calcul 49
5.2. Contraintes sous le centre 51
5.2.1. Calcul pour $z \neq 0$ 51
5.2.2. Calcul pour $z = 0$ 52
5.2.3. Contrôles 52
5.3. Contraintes sous le coin 53
5.3.1. Calcul pour $z \neq 0$ 53
5.3.2. Calcul pour $z = 0$ 55
5.3.3. Contrôles 55
5.3.4. Relations entre les résultats relatifs aux différents coins 56
5.4. Résultats 57

6. - NOYAU CENTRAL 66
6.1. Définition et cas de la charge linéairement répartie . 66
6.2. Méthode de calcul 67
6.3. Résultats 71

7. - EXCENTRICITE OPTIMALE 77
7.1. Définition 77
7.2. Expression 77
7.3. Résultats 78

BIBLIOGRAPHIE 81

2ème Partie

Modèle Anisotrope pour les sols et les roches

Page

INTRODUCTION 87

1. - ELASTICITE LINEAIRE ET ISOTROPE 89

1.1. Hypothèses 89

1.1.1. Loi ponctuelle 90

1.1.2. Loi linéaire 90

a - Orthotropie 91

b - Orthotropie de révolution 91

c - Isotropie 92

1.2. Discussion de ces hypothèses 94

1.2.1. Elasticité 94

a - Réversibilité 94

b - Indépendance du chemin 99

1.2.2. Linéarité 101

1.2.3. Isotropie 103

a - Anisotropie de structure 103

b - Anisotropie des propriétés mécaniques 107

1.3. Tentatives pour s'affranchir de l'isotropie 110

1.3.1. Théorie de WESTERGAARD 110

1.3.2. Facteur de concentration 110

1.3.3. Aélotropie 111

2. - ETUDE DE L'AELOTROPIE OU ORTHOTROPIE DE REVOLUTION 112

2.1. Paramètres de l'aélotropie 112

2.1.1. Relations contraintes-déformations 112

a - Repère d'aélotropie 112

b - Repère quelconque 114

2.1.2. Domaine de variation des coefficients de POISSON 114

2.1.3. Valeurs de $\frac{E_h}{E_v}$ les plus probables dans les sols 118

a - Sables 118

b - Argiles 118

2.2. Méthode de calcul sous chargement de révolution 121

2.2.1. Equations de BELTRAMI-MICHELL 121

2.2.2. Résolution 122

2.2.3. Conditions aux limites 125

a - Transformations de HANKEL 126

b - Expression des conditions aux limites en surface 128

2.2.4. Cas du massif semi-infini 129

a - Cas $G < G_o$ 129

b - Cas $G = G_o$ 130

c - Cas $G > G_o$ 130

2.3. Massif semi-infini sous différents cas de charge 131

2.3.1. Charge concentrée normale 131

a - Cas $G < G_o$ 133

b - Cas $G = G_o$ 134

c - Cas $G > G_o$ 136

2.3.2. Charge normale uniformément répartie sur un cercle 139

a - Cas $G < G_o$ 139

b - Cas $G = G_o$ 139

c - Cas $G > G_o$ 139

2.4. Etude de l'influence des différents paramètres 140

2.4.1. Etude des tassements 140

a - Influence des modules E_v, E_h et G 141

b - Influence des coefficients de POISSON 142

2.4.2. Etude des répartitions de contrainte 146

2.4.3. Conclusions 149

3. - RELATIONS ENTRE LES DIFFERENTS PARAMETRES DE L'AELOTROPIE DANS LES SOLS ET LES ROCHES 150

3.1. Expression de G en fonction des autres constantes 150

3.1.1. Etudes antérieures 150

a - Modèle de BARDEN 150

b - Modèle de TAN-TJONG-KIE 151

c - Modèle de GUTMAN 152

d - Modèle de WIENDIECK 152

3.1.2. Expression de G proposée 153
a - Hypothèse 153
b - Anisotropie de structure 154
c - Anisotropie des propriétés mécaniques 154
d - Valeur de G 155
3.2. Relations entre les coefficients de POISSON 158
3.2.1. Etude bibliographique 158
3.2.2. Discussion 159

4. - PRESSION INTERSTITIELLE. CARACTERISTIQUES DRAINEES ET NON DRAINEES 160
4.1. Coefficients A et B de pression interstitielle 160
4.1.1. Expression 160
4.1.2. Valeurs théoriques de A_o dans les sols 161
4.2. Relations entre les modules drainés et non drainés 162

5. - APPLICATIONS ET INTERET DU MODELE PROPOSE 166
5.1. Mesure des paramètres 166
5.1.1. Méthodes 166
a - Essais classiques 166
b - Dilatomètres de sondage 167
c - Véritable triaxial 167
d - Mesure indirecte de $\frac{E_h}{E_v}$ 168
5.1.2. Trièdres principaux des contraintes et déformations 169
5.2. Applications 170
5.2.1. Calcul des tassements 170
5.2.2. Calcul des contraintes 173
5.2.3. Pression interstitielle. Variations de volume .. 173
5.2.4. Massifs stratifiés 176
a - Roches 176
b - Terre armée 176

BIBLIOGRAPHIE 179

ANNEXE 191

-=-=-=-=-

PREMIERE PARTIE

FONDATIONS RECTANGULAIRES RIGIDES

INTRODUCTION

Les fondations rectangulaires sont très courantes dans la pratique et, faute de résultats les concernant, on les a longtemps calculées comme des fondations circulaires de même aire.

Si depuis une dizaine d'années, de nombreux chercheurs se sont penchés sur le cas du rectangle infiniment souple et linéairement chargé, très peu de travaux ont été entrepris sur la fondation rectangulaire infiniment rigide.

Nous pensons pourtant qu'il serait particulièrement utile pour l'ingénieur de connaître les déplacements et contraintes que provoquent ces fondations rigides puisqu'elles constituent un cas limite, en certains points défavorable.

Outre les tassements, rotations et distributions de contraintes, nous avons donc recherché la forme du noyau central, et la relation qui lie, à l'inclinaison de la charge, l'excentricité optimale (rotation nulle de la fondation).

Nous ne traitons que le cas du massif semi-infini, élastique isotrope et homogène. Il va sans dire que le sol n'est jamais ce modèle idéal et, dans la seconde partie de cette thèse, nous discutons une à une les hypothèses ainsi introduites. Néanmoins, en l'absence de lois plus justes, mais par suite plus complexes, l'élasticité isotrope permet une première approche des problèmes et peut se révéler intéressante, en particulier dans la prévision des distributions de contraintes.

1. - FONDATIONS SOUPLES OU FONDATIONS RIGIDES

Le calcul des déplacements et contraintes sous une plaque infiniment souple, linéairement chargée est analytique ; les résultats concernant un grand nombre de cas de charge ont d'ailleurs été rassemblés dans les "Tables pour le calcul des fondations" de GIROUD [15].

En fait, une fondation réelle se situe entre les deux cas limites de la fondation infiniment souple et de la fondation infiniment rigide. La solution la plus satisfaisante serait de prendre en compte sa flexibilité et différentes méthodes de calcul ont été proposées dans ce but. Si on écarte les méthodes du coefficient de raideur qui schématisent beaucoup trop le comportement du sol, les plus connues sont celles de FROHLICH, de OHDE et de DE BEER et KRSMANOVITCH. Une étude détaillée en a été faite par SCHEUCH [24] et d'importantes critiques limitent leur emploi.

Elles n'ont en effet été établies que pour des fondations de très grande longueur (poutre) et conduisent malgré cela à des calculs très lourds ; elles ne permettent que la détermination des réactions du sol et des efforts dans la poutre. Elles n'autorisent enfin (mise à part celle de OHDE) que des cas de charge très simples (forces concentrées verticales).

Toutes ces raisons font qu'elles restent très peu utilisées.

Des résultats beaucoup plus intéressants peuvent par contre être obtenus avec les programmes de calcul mis au point au C.E.B.T.P. pour les fondations flexibles.

Nous ferons à ce propos deux remarques :

• D'une part, il est très difficile de déterminer la "raideur" ou "indice de flexibilité" d'une fondation réelle qui n'est à peu près jamais une plaque homogène, mais qui est souvent liée à une structure complexe.

Cet indice de flexibilité r est de plus une quantité relative puisque fonction des propriétés du massif comme le montre l'expression proposée par GORBUNOV-POSSADOV [17] :

$$r = \frac{12\,\pi\,L^2\,B\,E\,(1-\nu_p^2)}{h^3\,E_p\,(1-\nu^2)}$$

L et B sont les côtés de la plaque ($L > B$) et h son épaisseur.

• D'autre part, il n'est malheureusement pas encore possible pour tout ingénieur d'utiliser ces programmes de calcul dès que se présente à lui un problème de fondation rectangulaire. Comme on le voit, les difficultés que soulève encore le calcul exact de la fondation flexible sont nombreuses.

La seconde solution, à laquelle nous avons contribué et qui, nous l'espérons, ne sera que provisoire, consiste à fournir les résultats les plus complets possibles concernant les deux cas limites entre lesquels sont comprises les fondations réelles.

Notons que selon GORBUNOV-POSSADOV [17] et TOUZOT [28], une dalle peut être considérée comme rigide lors du calcul des réactions du sol, avec moins de 10 % d'erreur si son indice de flexibilité est tel que :

$$r \leq 8\sqrt{\frac{B}{L}}$$

Signalons enfin que le cas infiniment rigide est particulièrement intéressant car il est, vis-à-vis des efforts dans la fondation, le plus défavorable. Il est donc dans le sens de la sécurité et pourrait à juste titre être préféré pour le dimensionnement des dalles, au cas infiniment souple actuellement utilisé (répartition linéaire des réactions du sol recommandée par le D.T.U. "Fondations Superficielles").

2. - METHODE DE CALCUL

2.1. Définition de la fondation et de la charge

2.1.1. La fondation

- Rectangulaire

Ses côtés sont B et L avec $L \geqslant B$. Sa surface est notée $S = L \times B$. Nous la caractériserons par le coefficient α

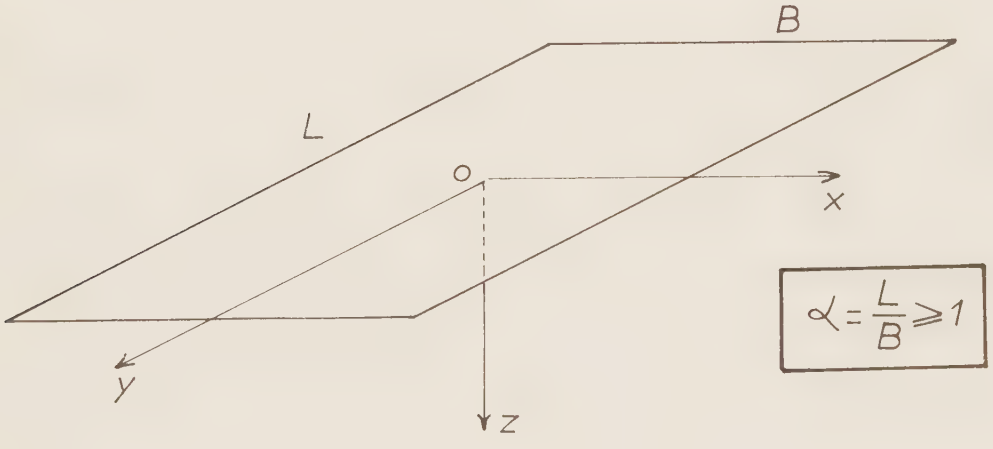


Figure 2.1.

Le repère est lié à la fondation. O est au centre, Ox parallèle au petit côté B et Oy parallèle au grand côté L. Oz est orienté vers l'intérieur du massif et nous appelons verticale sa direction. Ox et Oy sont orientés de façon que le trièdre Oxyz soit direct (figure 2.1.).

- Rigide

La fondation est supposée être infiniment rigide, c'est-à-dire parfaitement indéformable.

- Lisse

Nous supposerons qu'il ne peut se développer de réactions horizontales sous la fondation.

Notons cependant que selon les travaux d'ABRAMOV [1] cité par FLORIN [9] et de MUSKHELISHVILI [23] et LEE [20] cités par GIROUD [12] , la rugosité a un effet négligeable sur la distribution des contraintes normales.

D'autre part, l'influence sur les tassements des contraintes tangentielles (qu'on néglige en supposant la plaque lisse) est très faible (Travaux de SCHIFFMAN [25] , LEE et MUSKHELISHVILI).

Il n'est donc pas étonnant que le tassement d'une fondation reste pratiquement le même, quelle soit lisse ou rugueuse.

Ainsi, selon les travaux de SCHIFFMAN [25] sur le cercle souple, le rapport du tassement de la fondation rugueuse à la fondation lisse est de 1 pour $\nu = 0.5$, et 0.97 pour $\nu = 0.3$.

GIROUD [16] d'autre part a montré que ce rapport, dans le cas d'une fondation rectangulaire souple (avec $\frac{L}{B} < 5$) valait 0.92 pour $\nu = 0$.

Ces différentes remarques montrent que les valeurs des tassements et rotations obtenues ici sont valables pour toutes les fondations, qu'elles soient lisses ou rugueuses.

Il en est de même des distributions de contraintes sauf, sans doute, pour les contraintes horizontales (normales ou tangentielles) à faible profondeur sous la fondation.

2.1.2. La charge

Nous appelons N sa résultante ; elle sera nécessairement verticale puisque la fondation ne peut développer de réactions horizontales.

Elle est positive si de même sens que Oz.

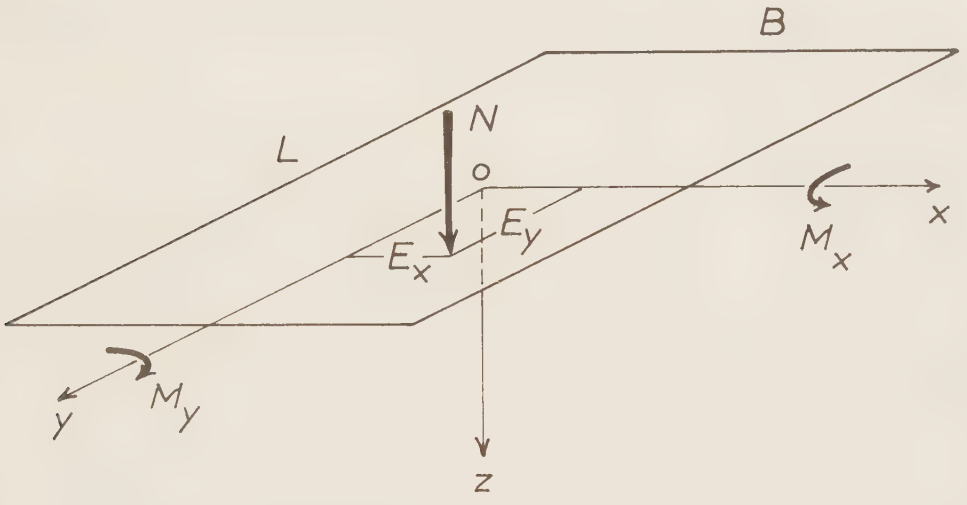


Figure 2.2.

Cette résultante peut être excentrée de E_x suivant 1'axe Ox et E_y suivant oy. Les moments correspondant sont notés M_y et M_x.

Les moments M_y et M_x et les rotations θy et θx sont positifs s'ils correspondent à des excentricités E_x et E_y positives, d'où les relations :

$$M_y = + N.E_x \qquad M_x = + N.E_y$$

Nous utiliserons par ailleurs les quantités sans dimensions :

$$e_y = \frac{E_y}{L} \qquad e_x = \frac{E_x}{B}$$

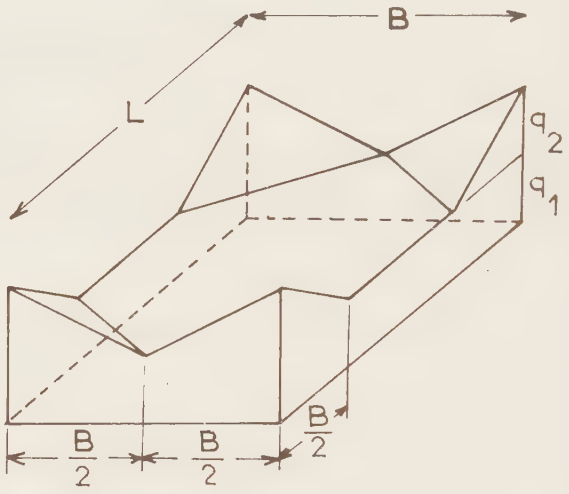
L'élasticité permettant la superposition, nous traiterons le problème en trois parties :

- charge normale centrée N ;
- Moment M_x par rapport à Ox ;
- Moment M_y par rapport à Oy.

2.2. Travaux antérieurs - Nécessité d'une autre approche

Les premières études sur les fondations rectangulaires rigides avaient pour but le calcul des efforts dans la fondation et, par conséquent, celui des réactions du sol.

• CARRILLO [6] proposait de schématiser leur distribution (sous charge normale centrée) comme le montre la figure suivante, et calculait les contraintes q_1 et q_2 définissant la répartition en écrivant que les tassements du centre et d'un coin étaient égaux.



• Le calcul de SCHLEICHER [26] imaginé en 1933 est celui que nous décrivons en 2.3. Ne disposant pas des moyens de calcul actuels, SCHLEICHER devait procéder par approximations successives, ce qui limitait considérablement l'emploi de sa méthode.

• La méthode des carrés de DE BEER [8] s'inspire de celle de GRASSHOF établie pour les poutres et repose sur la connaissance des surfaces d'influence du tassement. Comme celle de SCHLEICHER, elle conduit, après certaines approximations, à la résolution d'un système d'équations linéaires.

• CAQUOT [5], KERISEL et QUATRE [18] ont calculé les contraintes au sein du massif pour une charge centrée, en supposant qu'à la surface, les réactions étaient réparties suivant une parabole d'équation :

$$p(x,y) = \frac{N}{S}\left\{ \alpha + \beta\left[\left(\frac{x}{B/2}\right)^2 + \left(\frac{y}{L/2}\right)^2 \right] \right\}$$ où α et β

sont deux constantes telles que $\alpha + \frac{2}{3}\beta = 1$ (pour que la résultante soit égale à N). Ces auteurs recommandent les valeurs 0.70 pour α et 0.45 pour β, lorsque le coefficient de sécurité est assez grand.

Les distributions de réactions ainsi calculées sont reportées sur la figure 4.20. ; au centre la pression vaut 0.70 $\frac{N}{S}$ (quelque soit $\frac{L}{B}$) et au milieu des côtés 1.15 $\frac{N}{S}$; la répartition n'est pas très éloignée de la répartition uniforme. C'est ce qui explique que la distribution des contraintes au sein du

massif ne soit pas très satisfaisante (figures 5.4. et 5.5.). Sous le centre de la fondation carrée par exemple (fig. 5.4.), on ne retrouve pas le phénomène caractéristique des fondations rigides : la contrainte σ_z maximale se rencontre à la côte z = 0 et non à une certaine profondeur (0.35 B environ).

• BACHELIER [3] a également proposé la formule approchée suivante donnant en tout point de la fondation la valeur de la réaction du sol :

$$p(x,y) = \frac{4N}{\pi^2 S \sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{B/2}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{y}{L/2}\right)^2\right]}}$$

• Mais les travaux les plus complets concernant les fondations rectangulaires rigides sont dus à GORBUNOV-POSSADOV [17] et à TOUZOT [28]. Ces auteurs ont, en effet, donné les tassements, rotations, distributions de contraintes dans le cas général d'une charge à résultante inclinée et excentrée.

Les réactions inconnues étaient cherchées sous forme polynominale :

$$p(x,y) = \frac{N}{S} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \overline{P}_{2i,2j}\, x^{2i} y^{2j}$$

Pour des raisons de temps de calcul, le degré de ces polynomes était limité à des valeurs assez faibles (6 ou 8). Les courbes obtenues ne peuvent donc représenter la brutale augmentation des contraintes au voisinage des bords.

Etant trop faibles près des bords, les réactions proposées par GORBUNOV-POSSADOV sont bien sûr trop fortes au centre (fig. 4.20. à 4.22.). Comme le montrent les figures 5.4. et 5.5., elles conduisent donc à des distributions de contraintes au sein du massif différentes de la réalité, surtout pour les faibles profondeurs. Or le tassement d'une fondation reposant sur un massif est dû, pour une grande part, à celui des couches superficielles (elles sont souvent plus compressibles et les contraintes provoquées par la charge y sont plus grandes). Il est donc important, pour faire un calcul indirect du tassement (oedomètre ou triaxial), de connaître avec la meilleure précision possible les contraintes apportées par la fondation dans ces couches superficielles.

Les distributions de réactions ainsi obtenues sont, d'autre part, vis-à-vis des efforts dans la dalle, moins défavorables que la répartition exacte. Elles conduisent en outre, dans le cas d'une charge centrée à un tassement sous la fondation qui n'est constant qu'à 5 % près (TOUZOT p. 37). Enfin, étant près des bords très différentes de la réalité, les limites du noyau central qu'en a

déduit GORBUNOV-POSSADOV semblent très discutables (figure 6.8.).

Ces quelques critiques, plus marquées encore pour les résultats proposés par CARILLO ou CAQUOT et KERISEL, montrent qu'il était intéressant d'utiliser une méthode de calcul différente.

2.3. Calcul par intégration numérique

La méthode est naturellement inspirée par la propriété de superposition des solutions élastiques. La fondation est divisée en un certain nombre de carrés élémentaires (environ 500) de côté a (figure 2.3.). Ses dimensions sont alors notées :

$L = 2\,m\,a$ et $B = 2\,n\,a$ où

n et m sont des entiers avec $m \geqslant n$.

Les inconnues sont Pij résultantes des contraintes agissant sur les carrés (i, j).

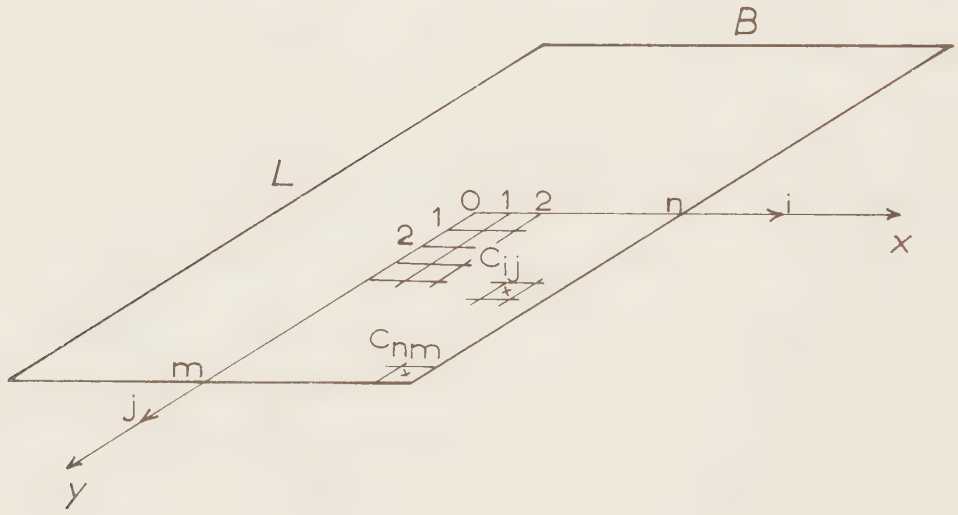


Figure 2.3.

Notons que sous les trois cas de charge envisagés, la répartition des réactions présente des symétries par rapport aux axes Ox ou Oy (Moment M_x ou M_y) ou par rapport à des plans passant par Oz et Ox ou Oy (charge N). Les réactions ne sont donc calculées que pour le quart de la fondation compris dans l'angle xOy et les inconnues sont au nombre de n x m.

Les centres Cij des carrés élémentaires (i, j) ont alors pour coordonnées dans xOy :

$$x = a\ (i - \frac{1}{2})$$

$$y = a\ (j - \frac{1}{2})$$

On suppose que les résultantes Pij sont appliquées au point Cij. Une distribution uniforme sur chacun des carrés satisfait à cette condition et nous verrons plus loin (§ 4.2.) comment on peut passer de la répartition "en escalier" ainsi obtenue à une répartition continue plus proche de la réalité.

Le calcul du tassement Wij d'un point Cij s'effectue en sommant les effets des contraintes réparties sur chacun des carrés.

- Pour les carrés différents de (i, j), on peut raisonnablement remplacer ces contraintes par leur résultante Pij et utiliser la formule de BOUSSINESQ donnant le déplacement vertical w provoqué à une distance r par une force verticale concentrée P

$$w = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \frac{P}{r}$$

- On ne peut faire cette approximation pour le carré (i, j) lui-même (elle conduirait à un tassement infini !).

Le tassement du point Cij dû à la charge Pij est calculé en supposant le carré (i, j) rigide.

GORBUNOV-POSSADOV propose la valeur :

$$w = 0{\cdot}88\ \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{P_{ij}}{a}$$

Notons qu'on obtient la même formule en supposant que le rapport du tassement du centre de la fondation souple sous charge uniformément répartie, au tassement de la fondation rigide supportant une charge égale, est le même pour la fondation carrée et pour la fondation circulaire où il vaut $\frac{4}{\pi}$ (Les cas du carré souple et du cercle souple ou rigide sont analytiques. GIROUD [12]).

Finalement, le tassement Wij du point Cij s'écrit :

$$w_{ij} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{k \neq i} \sum_{l \neq j} \frac{P_{kl}}{r_{ijkl}} + 0{\cdot}88\ \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{P_{ij}}{a}$$

r_{ijkl} est la distance séparant Cij de Ckl

2.4. Résolutions

2.4.1. Charge centrée

On exprime le fait que la fondation est rigide et la charge centrée en écrivant que le tassement est constant.

$$W_{ij} = W_o \qquad \forall\, i, j$$

On obtient ainsi un système de n x m équations linéaires pour les n x m inconnues Pij. La charge N appliquée au centre de la fondation et provoquant le tassement Wo peut ensuite être calculée par

$$N = 4 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij}$$

2.4.2. Moments

Lorsque la fondation est soumise à un moment Mx par rapport à Ox, elle subit une rotation θx autour de Ox. On écrit que le tassement Wij vaut :

$$Wij = a\ j\ tg\ \theta x$$

d'où n x m équations.

Le calcul est identique pour un moment My ; Wij vaut alors :

$$Wij = a\ i\ tg\ \theta y$$

Les moments provoquant les rotations θx et θy sont donnés par :

$$M_x = 4 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a(j-0.5) P_{ij} \qquad M_y = 4 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a(i-0.5) P_{ij}$$

Ces systèmes de n x m équations à n x m inconnues ont été résolus au C.E.B.T.P. pour différentes valeurs du rapport α des côtés, lors d'une étude sur les tassements et rotations (réf. [2]). Nous remercions vivement M. ABSI de nous en avoir communiqué les résultats et de les avoir complété pour les valeurs de α non initialement traitées, mais que nous avions retenues.

3. - TASSEMENTS ET ROTATIONS

Nous avons rassemblé dans le tableau 3.1. les valeurs obtenues par ABSI et celles proposées par GORBUNOV-POSSADOV et GIROUD. On remarque que bien que les deux méthodes de calcul (Intégration numérique et développement polynomial) conduisent à des distributions de réactions très différentes, les résultats concernant les déplacements sont voisins.

Notons encore que le cas de la bande infinie ($\alpha \to \infty$) est analytique. Sa rotation a été calculée par FROELICH [10] et donne un coefficient de tassement ky = 5.10.

3.1. Résultats ABSI

Le calcul de la charge N et des moments Mx et My provoquant respectivement le tassement w_0 et les rotations θx et θy a permis à ABSI [2] de donner les coefficients de forme f et k en fonction du rapport $\alpha = \frac{L}{B}$ des côtés.

Le tassement s'écrit alors :

$$w_0 = f \cdot \frac{1-\nu^2}{EL} \cdot N$$

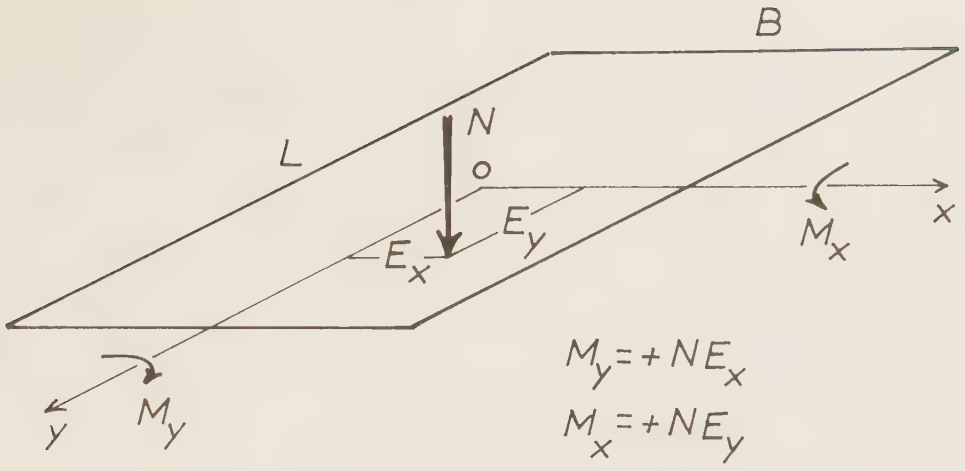
et les rotations

$$\theta_x = k_x \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{M_x}{L^2 B} \qquad \text{et} \qquad \theta_y = k_y \cdot \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{M_y}{L B^2}$$

N.B. : Les résultats sont présentés un peu différemment par ABSI en ce qui concerne les rotations où n'apparaît qu'un seul coefficient k mais où le rapport α des côtés va de 0 à ∞ et non de 1 à ∞ comme ici.

3.2. Résultats GORBUNOV-POSSADOV et GIROUD

Dans le calcul par développement polynomial de GORBUNOV-POSSADOV, les déplacements sont obtenus directement en résolvant le système d'équations. GORBUNOV-POSSADOV a donc proposé des coefficients de forme que nous avons traduit en F, k_x et k_y. Les résultats de GIROUD ont été obtenus par interpolation à partir de certains cas particuliers connus (cas analytiques, valeurs de GORBUNOV-POSSADOV).



. Tassement (charge normale centrée N) $\omega_o = F \frac{1-\nu^2}{EL} N$

$\alpha = \frac{L}{B}$	1	2	3	4	5	7	10	∞
F ABSI	0.87	1.18	1.40	1.55	1.68			
F GIROUD	0.88	1.21	1.43	1.59	1.72	1.92	2.13	∞
F GORBUNOV	0.88	1.21	1.44	1.59	1.72	1.93	2.13	

. Rotation (Moment M_x) $\theta_x = k_{\theta x} \frac{1-\nu^2}{E} \frac{M_x}{L^2 B}$

$\alpha = \frac{L}{B}$	1	2	3	4	5	7	10	∞
K_x ABSI	3.80	3.14	2.72	2.41	2.18			
K_x GIROUD	4.13	3.43		2.61	2.36		1.61	0
K_x GORBUNOV	4.08	3.40	2.97		2.36	1.96	1.61	

. Rotation (Moment M_y) $\theta_y = k_{\theta y} \frac{1-\nu^2}{E} \frac{M_y}{B^2 L}$

$\alpha = \frac{L}{B}$	1	2	3	4	5	7	10	∞
K_y ABSI	3.80	4.30	4.52	4.65	4.72			5.10
K_y GIROUD	4.13	4.60	4.78	4.87	4.94		5.05	5.10
K_y GORBUNOV	4.08	4.68	4.90		5.16	5.15	5.12	

Tableau 3.1 : Déplacements d'une fondation rigide ; comparaison des résultats proposés par ABSI, GIROUD et GORBUNOV-POSSADOV.

4. - DISTRIBUTION DES REACTIONS DU SOL

4.1. Résultats ABSI - Distribution discontinue

Compte tenu de l'hypothèse faite (les résultantes P_{ij} agissent aux centres des carrés (i, j)), les valeurs obtenues par ABSI conduisent à des courbes de répartition de contraintes dites "en escalier" dont nous donnons quelques exemples dans le cas d'une charge centrée (fig. 4.1. et 4.2.) ou d'un moment (fig. 4.3. à 4.6.). Nous appelons ρ_{ij} la valeur de la pression au point C_{ij}. Dans le cas des distributions précédentes, elle vaut $\rho_{ij} = \frac{P_{ij}}{a^2}$.

Deux problèmes se sont alors posés à nous :

- Trouver une méthode permettant de passer de la distribution "en escalier" à une distribution continue plus proche de la réalité.
- Dégager et, si possible, éliminer l'influence du découpage. Notons à ce propos que les répartitions obtenues par ABSI dépendent dans une grande mesure de la finesse du découpage comme on peut le voir sur la figure 4.7. où sont portées les courbes correspondant à une fondation carrée divisée en 100 puis 400 carrés élémentaires.

Répartition des réactions.

Charge centrée N.

Fondation rectangulaire $\frac{L}{B} = 5$.

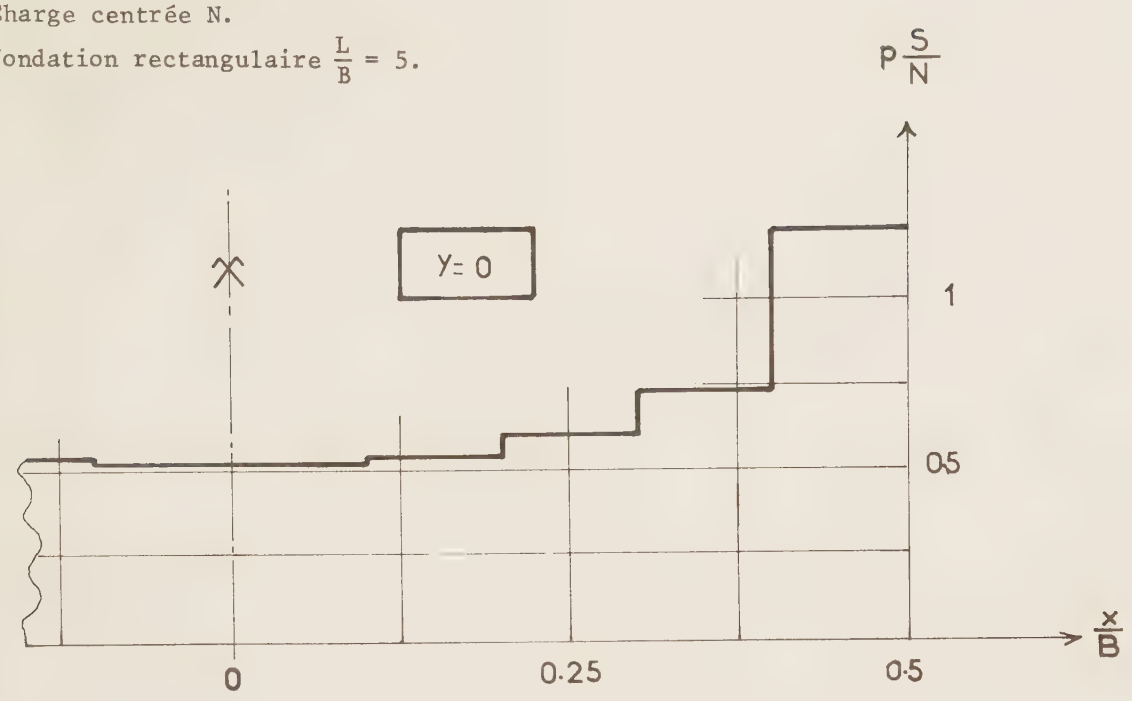


Figure 4.1. Répartition suivant le petit axe (y = 0)

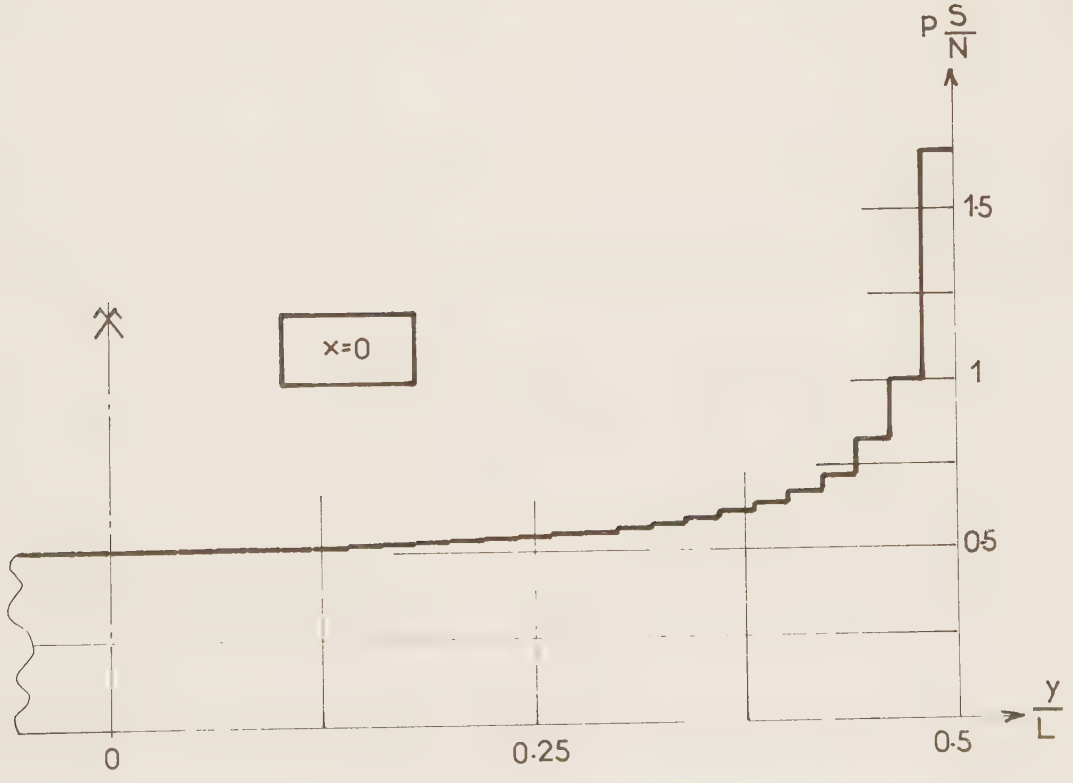


Figure 4.2. Répartition suivant le grand axe (x = 0)

Répartition des réactions. Moment M_y
Fondation rectangulaire $\frac{L}{B} = 5$.

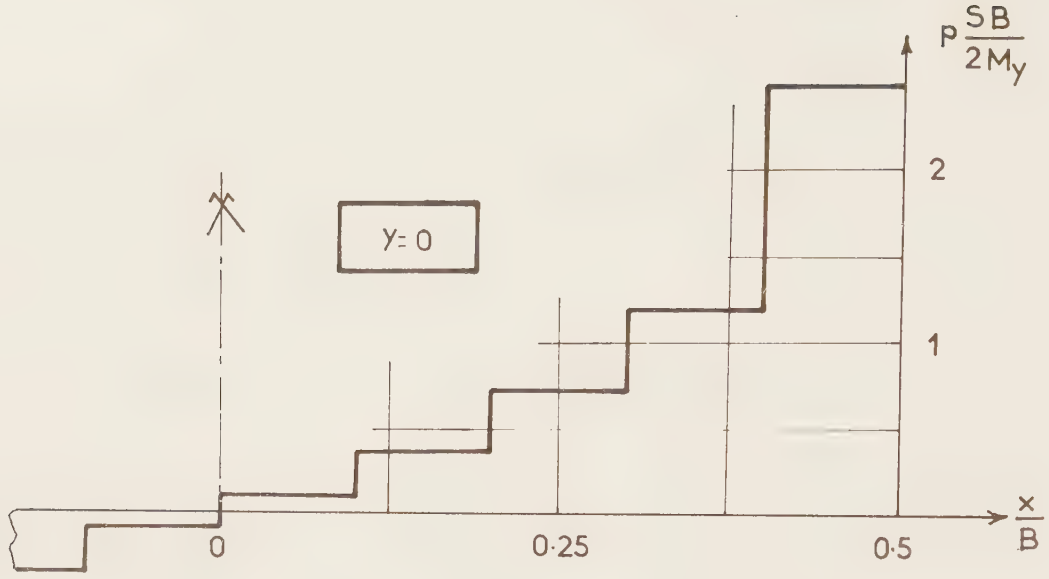


Figure 4.3. Répartion le long d'un axe perpendiculaire à l'axe de rotation (y = 0).

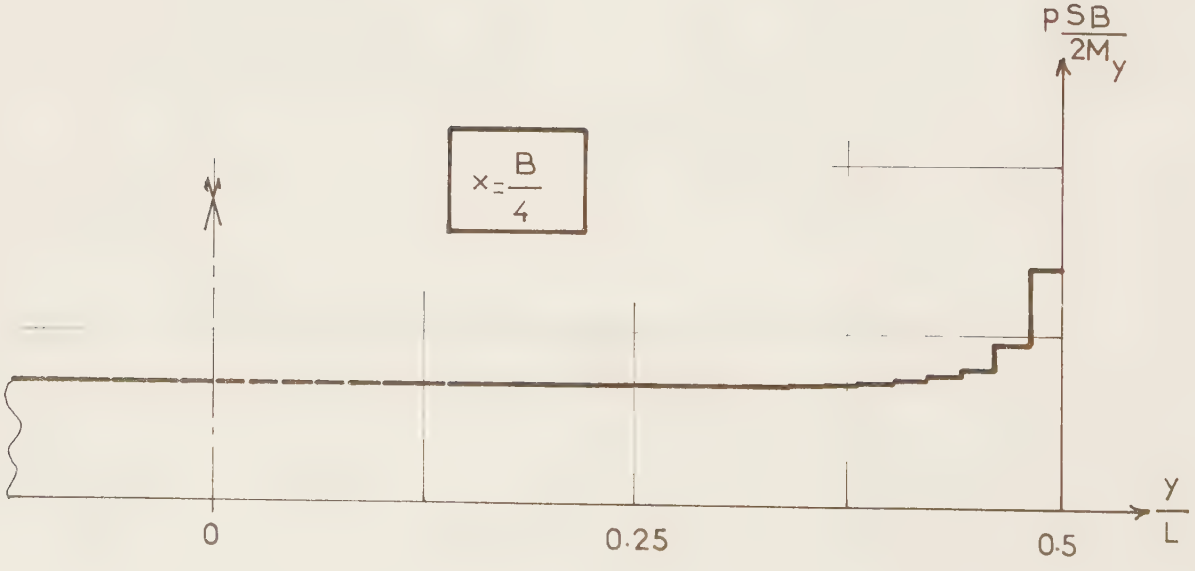


Figure 4.4. Répartition le long d'un axe parallèle à l'axe de rotation (x = B/4).

Répartition des réactions. Moment M_X
Fondation rectangulaire $\frac{L}{B} = 5$.

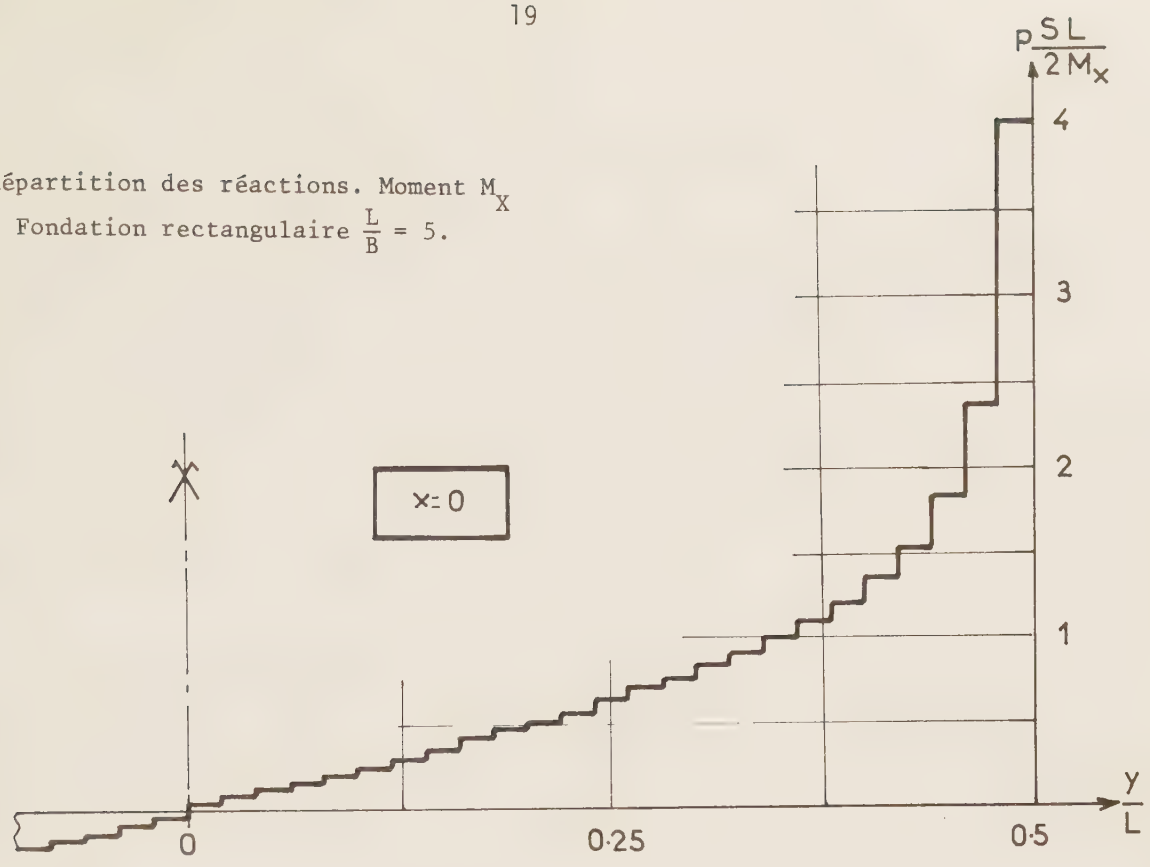


Figure 4.5. Répartition le long d'un axe perpendiculaire à l'axe de rotation (x = 0).

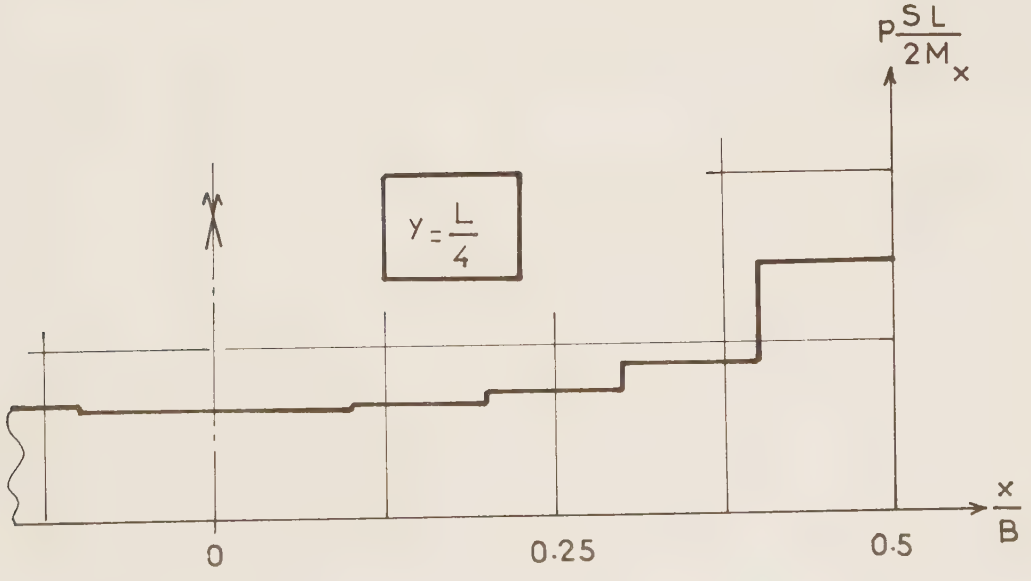


Figure 4.6. Répartition le long d'un axe parallèle à l'axe de rotation (y = L/4).

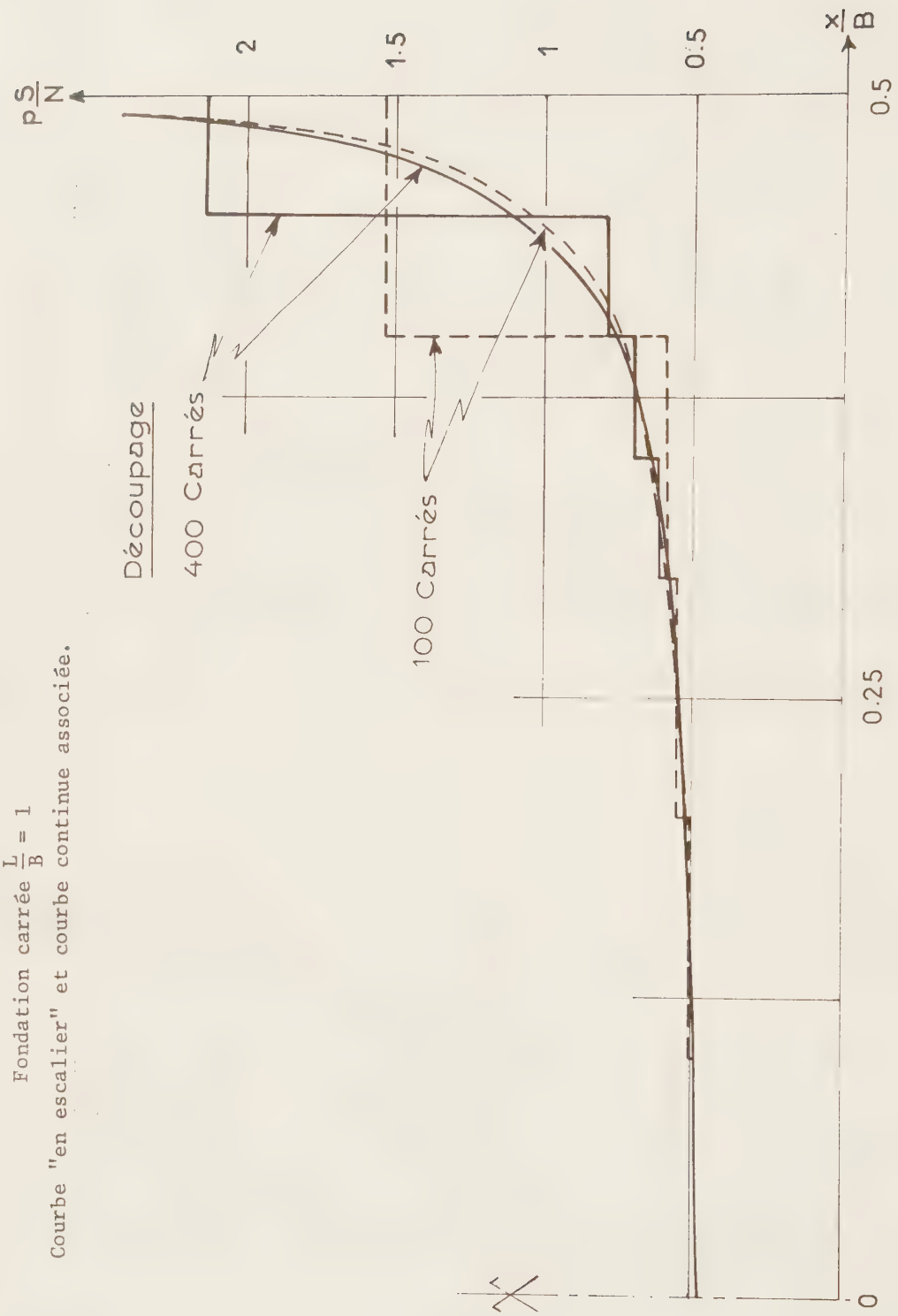


Figure 4.7. Répartition des contraintes. Charge normale centrée N.
Fondation carrée $\frac{L}{B} = 1$
Courbe "en escalier" et courbe continue associée.

4.2. Méthode de calcul de la distribution continue

4.2.1. Charge centrée

Le problème posé est de trouver la distribution continue la plus voisine possible de la distribution obtenue par ABSI, et telle que la résultante des réactions ainsi réparties reste inchangée (et égale à N).

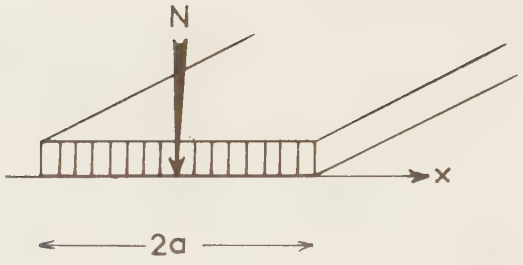
Nous avons cherché la surface p (x, y) ainsi définie, par ses intersections p_y (x) et p_x (y) avec des plans verticaux respectivement parallèles à ox (y = Y) et à oy (x= X). La proposition précédemment énoncée se traduit alors par le fait que les aires comprises entre les courbes p_y (x) (ou p_x (y)) et le plan z = 0 sont égales pour les deux distributions.

Nous avons constaté, et les exemples des figures 4.1., 4.2. et 4.7. le montrent, qu'au voisinage du centre, il était facile de tracer la courbe continue associée à la courbe "en escalier". Les quantités P_{ij} sont, en effet, très voisines et on peut valablement faire passer les courbes p_y (x) ou p_x (y) par les centres des paliers des courbes obtenues par ABSI (figure 4.8.).

Les difficultés naissent par contre, lorsqu'on se rapproche du bord de la fondation, c'est-à-dire pour la détermination de la branche infinie de ces courbes. Or, il est indispensable d'avoir près des bords la répartition des réactions la plus exacte possible si on veut calculer les limites du noyau central puisque c'est alors la différence entre les contraintes de compression (dues à N) et les contraintes de traction (dues à M_x et M_y) qui intervient.

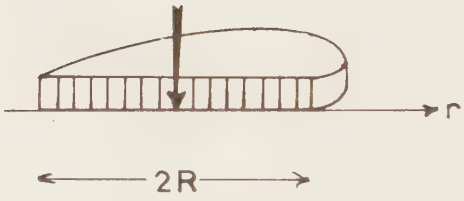
Deux cas analytiques de répartition de contraintes sous une fondation rigide sont connus (GIROUD [15]).

- Bande infinie :



(4.1.) $$p(x)\cdot\frac{S}{N}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

- Cercle :



(4.2.) $$p(r)\cdot\frac{S}{N}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}$$

Ces deux expressions sont de la forme :

$$p\cdot\frac{S}{N}=C\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

Nous avons donc supposé que la branche infinie des courbes de répartition avait même forme dans le cas du rectangle que dans ceux de la bande infinie et du cercle.

D'où, par analogie avec les formules 4.1. et 4.2., les équations proposées pour les courbes au voisinage du bord :

(4.3.)

$$p_y(x)\cdot\frac{S}{N}=C_y\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{(B/2)^2}}}+C'_y$$

Suivant un axe (z = 0, y = Y) parallèle à O_x

$$p_x(y)\cdot\frac{S}{N}=C_x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{(L/2)^2}}}+C'_x$$

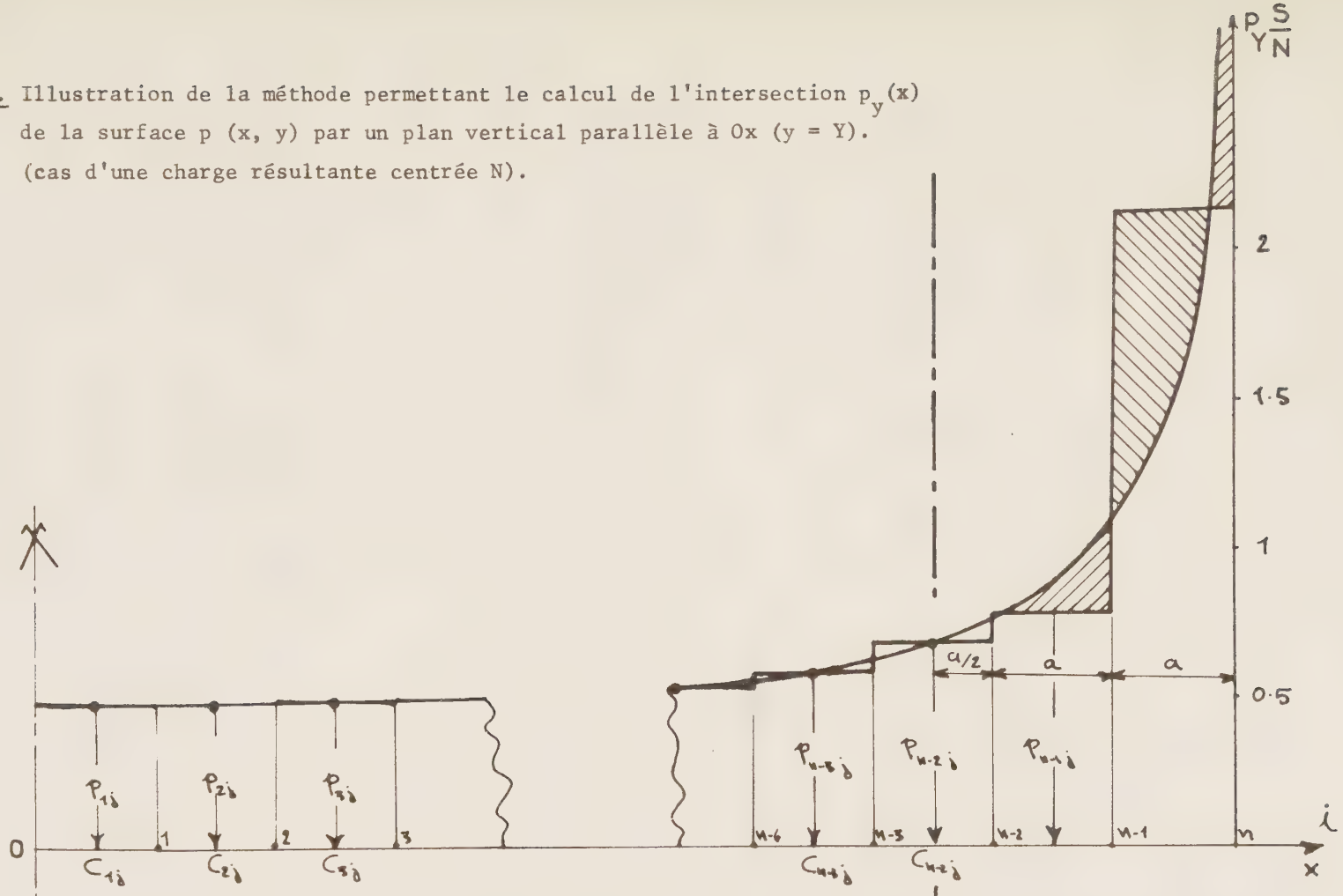
Suivant un axe (z = 0, x = X) parallèle à O_y

Les coefficients C_y et C'_y ne dépendent que de Y et α ; C_x et C'_x de X et α ; ils sont déterminés par deux équations :

- l'une traduit le fait que la branche infinie se raccorde au reste de la courbe ;

- l'autre exprime que la résultante des contraintes ainsi calculées a même valeur que celle déduite de la courbe "en escalier" (aires égales).

Figure 4.8. Illustration de la méthode permettant le calcul de l'intersection $p_y(x)$ de la surface p (x, y) par un plan vertical parallèle à Ox (y = Y). (cas d'une charge résultante centrée N).



La courbe continue passe par les milieux des paliers horizontaux de la courbe "en escalier" (au point C_{ij} la contrainte p_{ij} vaut donc :

$$p_{ij} = \frac{P_{ij}}{a^2}$$

La courbe a pour équation

$$p_Y(x) \cdot \frac{S}{N} = C_Y \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{B/2}\right)^2}} + C'_Y$$

(Les aires hachurées sont égales).

Les calculs des coefficients C_y, C'_y, C_x et C'_x ont été effectués à l'ordinateur pour :

$y = (j - 0.5).a$ avec $j = 1, 2, \ldots, m$ ou $x = (i - 0.5).a$ avec $i = 1, 2, \ldots, n$

et pour $\alpha = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 5$ et 10.

La méthode retenue et illustrée par la figure 4.8. est donc la suivante :

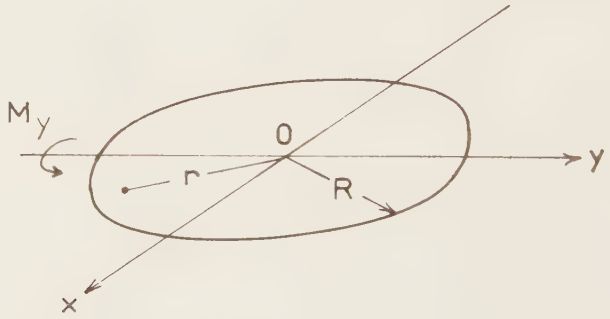
- Pour tous les points C_{ij} situés à une distance supérieure ou égale à 2,5 a d'un bord de la fondation, nous avons conservé, pour la contrainte, la valeur $p_{ij} = \frac{p_{ij}}{a^2}$ directement obtenue par ABSI. Ces points C_{ij} correspondent à $0 < i \leqslant n - 2$ et $0 < j \leqslant m - 2$.
- Pour tous les points à une distance inférieure à 2,5 a d'un bord, la répartition des réactions est donnée par les équations 4.3. définies ci-dessus.

4.2.2. Moment M_y

Le principe de la détermination des réactions est le même que pour la charge centrée (§ 4.2.1.). Néanmoins, les calculs sont plus longs car les expressions diffèrent suivant qu'on cherche la distribution le long d'un axe perpendiculaire ou parallèle à l'axe de rotation (ici oy).

Revenons en effet aux deux cas analytiques du cercle et de la bande infinie lorsqu'ils sont soumis à un moment M_y :

- cercle :



$$p(x,y) = \frac{M_y}{\pi R^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{x}{R}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}}$$

$$\left(r^2 = x^2 + y^2\right)$$

. Intersection avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation Oy

$y = cste = Y$

(4.4.) $$p_Y(x) = C_Y \frac{\frac{x}{R}}{\sqrt{1-\frac{Y^2}{R^2}}} \qquad \text{avec} \quad C_Y = \frac{3}{2}\cdot\frac{M_y}{\pi R^3}$$

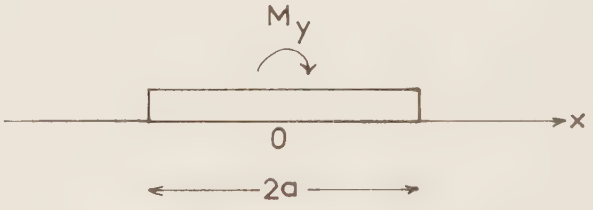
. Intersection avec un plan vertical parallèle à l'axe de rotation

$x = cste = X$

(4.5.) $$p_X(y) = C_X \frac{1}{\sqrt{1-\frac{Y^2}{R^2}}} \qquad \text{avec} \quad C_X = \frac{3}{2}\cdot\frac{M_y}{\pi R^3}\cdot\frac{x}{R}$$

Notons que cette expression a même forme que celle qui correspond à une charge centrée (cf § 4.2.1.).

- Bande infinie :



$$p(x) = \frac{M_y}{2a^2}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

. Cette équation est celle de l'intersection de p (x, y) avec un plan perpendiculaire à Oy ; elle a pour forme :

(4.6.) $$p_Y(x) = C_Y \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \qquad \text{avec} \quad C_Y = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{M_y}{a^2}$$

. L'intersection avec un plan parallèle à Oy ne donne aucun renseignement puisque p ne dépend pas de y.

On remarque donc que la branche infinie n'a pas même expression suivant qu'il s'agisse de $p_Y(x)$ ou $p_X(y)$ et nous sommes amenés à distinguer les deux cas.

a - Intersection $p_Y(x)$ de la surface p (x, y) avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation oy

Les figures 4.3. et 4.5. sont des exemples de répartition discontinue des réactions le long d'un axe perpendiculaire à l'axe de rotation.

Pour les points au voisinage du centre, l'examen de ces courbes nous a amené, comme pour la charge centrée, à faire passer la courbe continue par les centres des paliers horizontaux de la courbe en escalier. Cela conduit, comme le montre la figure 4.9., à remplacer sur chaque carré, la distribution uniforme par une distribution à peu près linéaire. On peut remarquer que si la résultante verticale est pratiquement inchangée, il n'en est pas de même du moment par rapport à Oy. Afin que le moment résultant reste inchangé et égal à M_y, nous avons tenu compte lors du calcul des réactions près des bords, de la différente introduite ici, mais elle conduit à une correction négligeable (inférieure à 0,4 % pour la fondation carrée).

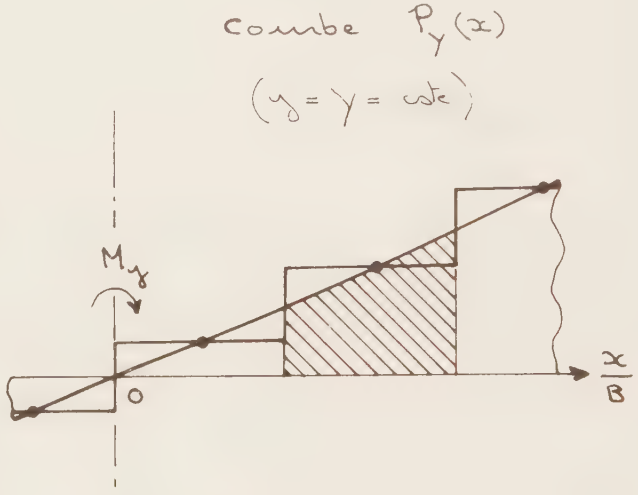


Figure 4.9.

Le calcul des réactions au voisinage des bords s'inspire du même principe que pour la charge centrée : nous avons donné à la branche infinie la même forme que celle des cas analytiques connus (formules 4.4. et 4.6.), d'où l'expression proposée :

$$(4.7.)\quad p_Y(x) \cdot \frac{SB}{2M_y} = C_Y \frac{\frac{x}{B/2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{B/2}\right)^2}} + C'_Y$$

Les coefficients C_Y et C'_Y ont été calculés pour les mêmes valeurs de α et Y que pour la charge centrée ; notons cependant que la seconde équation qui permet leur détermination (cf § 4.2.1.) n'est plus l'égalité des résultantes, mais celle des moments par rapport à Oy.

b - Intersection p_x (y) de la surface p (x, y) avec un plan vertical parallèle à l'axe de rotation oy

Le problème est en tout point identique à celui de la charge centrée (comparer les figures 4.2. et 4.4.).

- Les courbes "en escalier" ont même allure, notamment au centre (elles ne passent pas par l'origine).
- Les branches infinies des cas analytiques ont même expression (rapprocher la formule 4.5. de 4.1. et 4.2.).

D'où $$p_x(y) \cdot \frac{SB}{2\Pi_y} = C_x \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{L/2}\right)^2}} + C'_x \qquad (4.8.)$$

- Les équations permettant le calcul de C_x et C'_x sont les mêmes ; contrairement au cas précédent, en effet, (§ 4.2.2.1.), seule l'égalité des résultantes (donc des aires) est à envisager, les points étudiés étant équidistants de l'axe de rotation oy.

4.2.3. Moment M_x

La méthode et les expressions sont analogues au cas du moment M_y étudié ci-dessus en permutant partout x et y, B et L, X et Y.

En particulier, nous avons pour les branches infinies

$$p_x(y) \cdot \frac{SL}{2\Pi_x} = C_x \frac{\frac{y}{L/2}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{L/2}\right)^2}} + C'_x \qquad (4.9.)$$

$$p_y(x) \cdot \frac{SL}{2\Pi_x} = C_y \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{B/2}\right)^2}} + C'_y$$

En résumé, la méthode illustrée par la figure 4.8. est toujours valable, quelle que soit la sollicitation (N, M_x ou M_y) et quelle que soit la courbe envisagée ($p_x(y)$ ou $p_y(x)$). Seule, l'expression de la branche infinie peut changer (formules 4.3., 4.7., 4.8. et 4.9.) ainsi que le calcul des coefficients C_x, C'_x, C_y et C'_y.

Cette méthode nous a ainsi permis de déterminer les courbes de répartition $p_x(y)$ et $p_y(x)$ pour les charges N, M_x et M_y et pour les valeurs de X, Y et α signalées au § 4.2.2. A titre d'exemple, nous donnons les distributions obtenues pour la fondation carrée dans le tableau 4.10 et quelques courbes de répartitions dans les figures 4.11 à 4.14.

4.3. Discussion des résultats

4.3.1. Influence du découpage

Nous nous proposions deux buts :

- trouver une répartition plus proche de la réalité que la répartition discontinue ;
- dégager l'influence du découpage.

Or, il s'avère que la méthode utilisée pour résoudre le premier problème permet précisément d'éliminer l'influence de la finesse du découpage.

Si, en effet, pour un rapport α choisi, nous appliquons cette méthode aux deux répartitions "en escalier" données par deux découpages différents, nous obtenons pratiquement la même courbe continue. La figure 4.7. où apparaissent les répartitions correspondant à un découpage de la fondation en 100 puis 400 carrés élémentaires illustre cette remarque.

4.3.2. Comparaison du cas $\alpha = 10$ et de la bande infinie (analytique)

Nous avons porté sur les figures 4.15 à 4.18 les courbes obtenues ici pour une fondation très longue ($\frac{L}{B} = 10$) et celles de la bande infinie. Notons que les courbes "en escalier" sont vraiment très schématiques puisque, parallèlement à son petit côté, la fondation n'est divisée qu'en 6 carrés (fig. 4.15. et 4.16.).

Tableau 4.10. Répartition des réactions sous une fondation carrée.

Charge centrée et moment.

$P\frac{S}{N}$

L/B = 1	Y/L \ X/B	0.025	0.075	0.125	0.175	0.225	0.275	0.325	0.375	0.425	0.475
	0.025	0.481	0.485	0.493	0.507	0.528	0.559	0.607	0.697	0.868	1.444
	0.075	0.485	0.489	0.497	0.510	0.532	0.563	0.611	0.701	0.872	1.451
	0.125	0.493	0.497	0.505	0.519	0.540	0.571	0.620	0.709	0.882	1.465
	0.175	0.507	0.510	0.519	0.533	0.553	0.585	0.633	0.724	0.899	1.489
	0.225	0.528	0.532	0.540	0.553	0.574	0.605	0.654	0.745	0.923	1.523
	0.275	0.559	0.563	0.571	0.585	0.605	0.637	0.685	0.777	0.959	1.573
	0.325	0.607	0.611	0.620	0.633	0.654	0.685	0.735	0.827	1.014	1.646
	0.375	0.697	0.701	0.709	0.724	0.745	0.777	0.827	0.921	1.117	1.775
	0.425	0.868	0.872	0.882	0.899	0.923	0.959	1.014	1.117	1.211	2.825
	0.475	1.444	1.451	1.465	1.489	1.523	1.573	1.646	1.775	2.825	3.720

$P\frac{SB}{2M_y}$

Y/L \ X/B	0.025	0.075	0.125	0.175	0.225	0.275	0.325	0.375	0.425	0.475
0.025	0.053	0.162	0.276	0.399	0.537	0.700	0.904	1.213	1.713	3.202
0.075	0.053	0.163	0.277	0.401	0.539	0.702	0.908	1.217	1.717	3.209
0.125	0.054	0.165	0.280	0.404	0.544	0.708	0.914	1.225	1.727	3.225
0.175	0.055	0.167	0.285	0.411	0.552	0.718	0.926	1.238	1.744	3.250
0.225	0.056	0.172	0.292	0.421	0.565	0.734	0.944	1.259	1.770	3.290
0.275	0.059	0.179	0.304	0.438	0.586	0.759	0.973	1.293	1.810	3.351
0.325	0.063	0.191	0.323	0.464	0.620	0.800	1.021	1.347	1.874	3.445
0.375	0.070	0.213	0.361	0.517	0.688	0.883	1.119	1.461	2.004	3.623
0.425	0.086	0.261	0.440	0.630	0.835	1.067	1.343	1.730	2.115	3.790
0.475	0.139	0.420	0.709	1.010	1.332	1.688	2.100	2.637	4.516	6.817

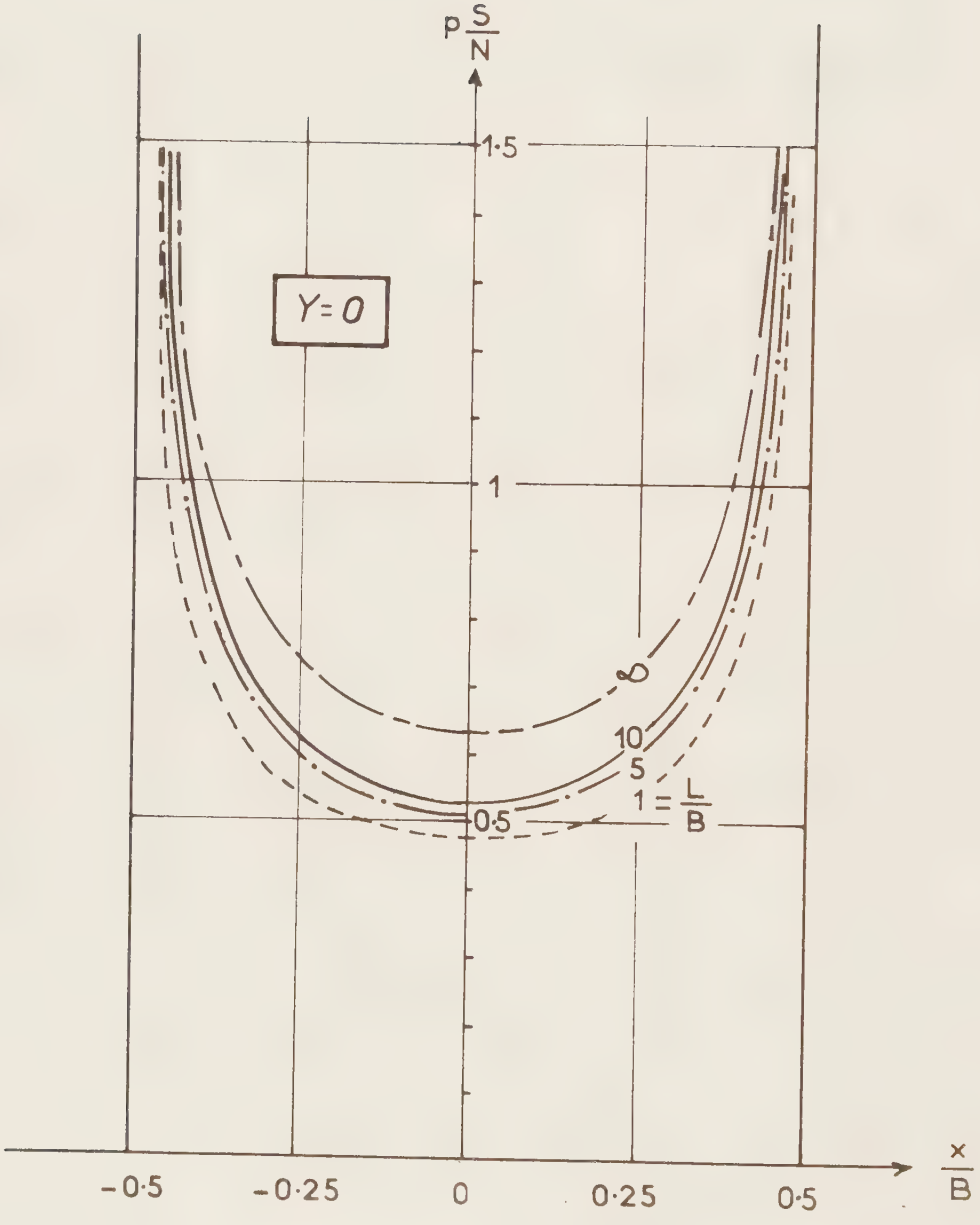


Figure 4.11 Répartition des réactions suivant le petit axe ox (y = 0).
Charge normale centrée N.

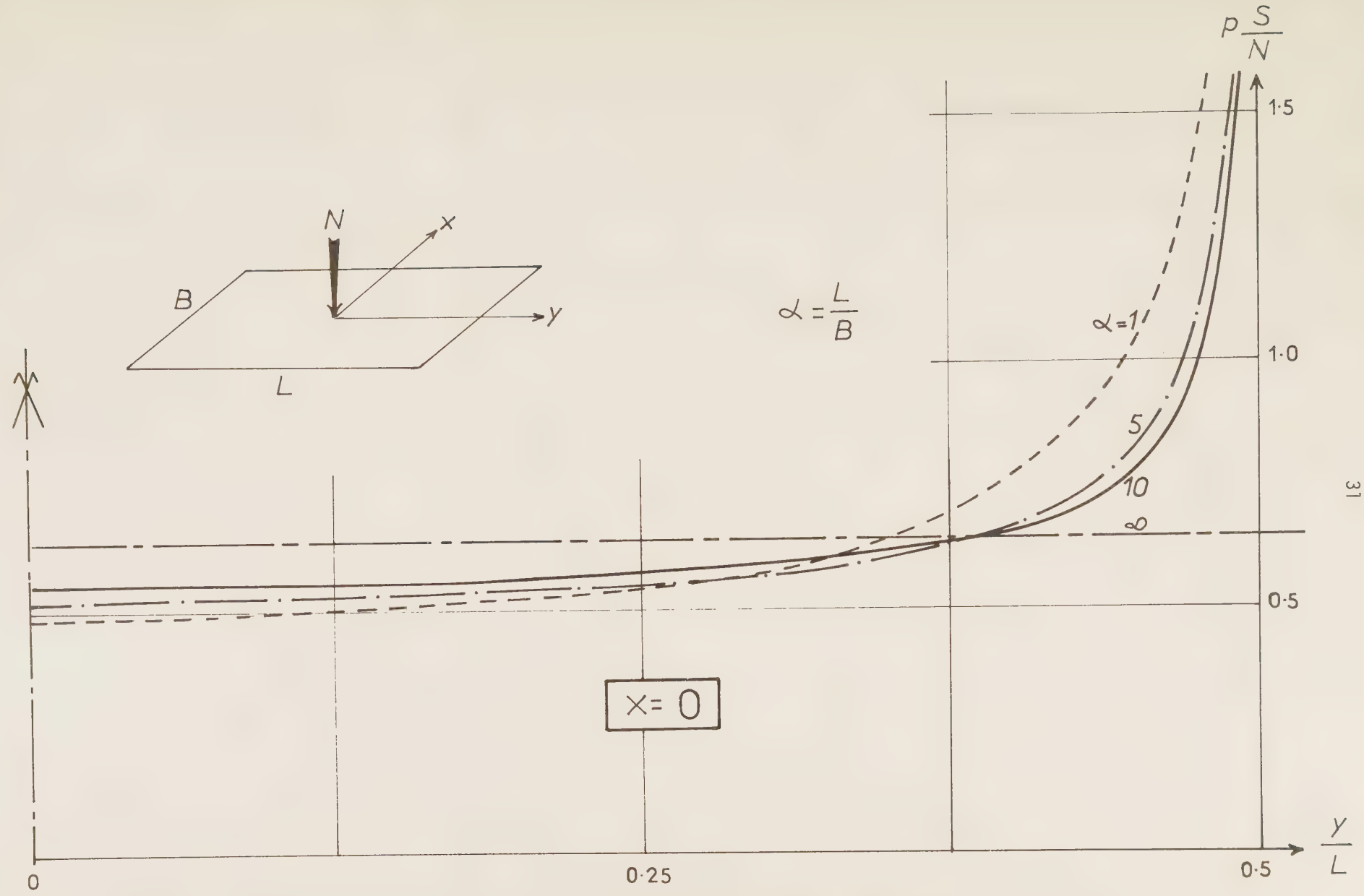


Figure 4.12 Répartition des réactions suivant le grand axe oy (x = 0). Charge normale centrée N.

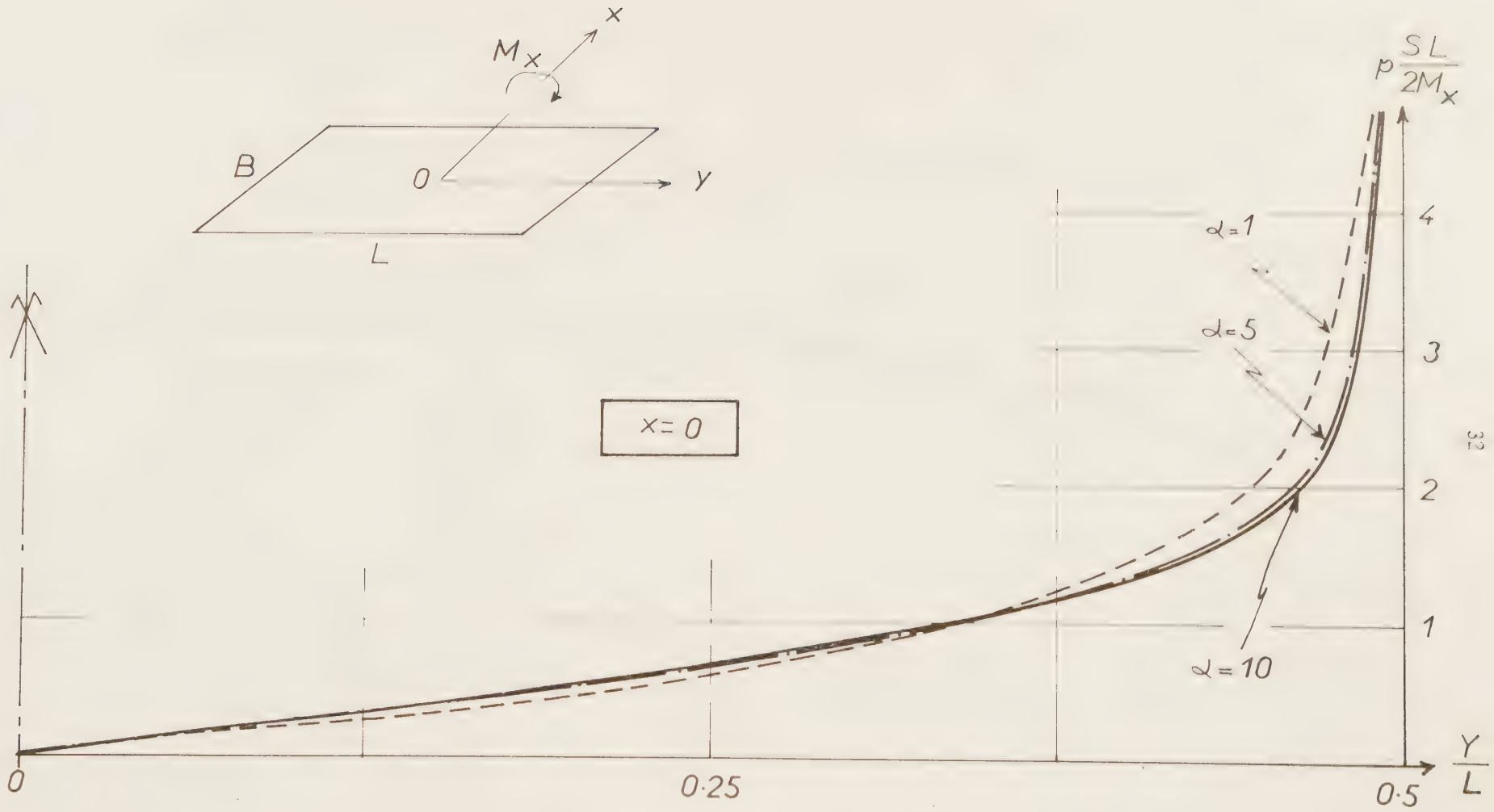


Figure 4.13 Répartition des réactions suivant le grand axe oy (x = 0). Moment M_x par rapport à ox.

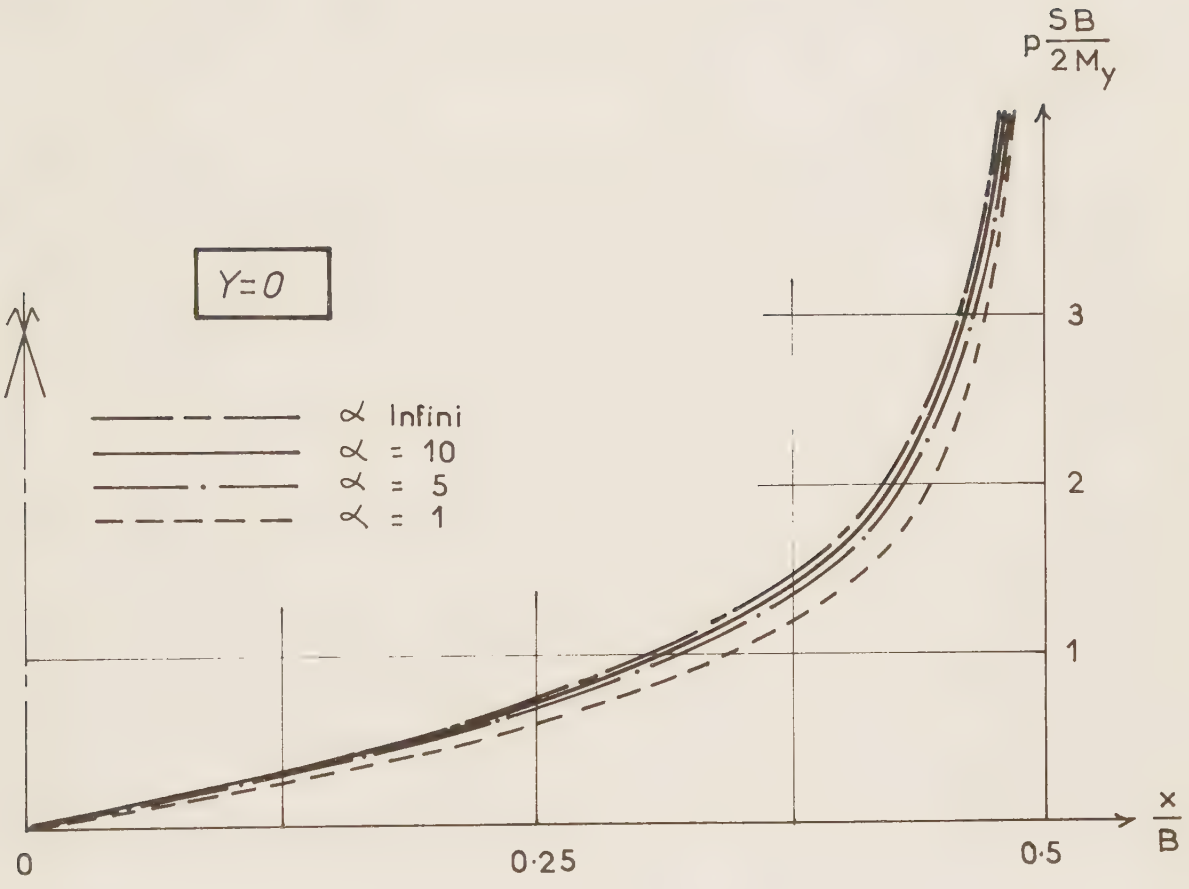


Figure 4.14. Répartition des réactions le long du petit axe (y = 0).
Moment M_y par rapport à oy.

- charge centrée (figure 4.15.)

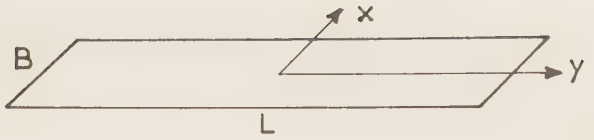
Les courbes de répartition le long du petit axe sont voisines ; toutefois, les réactions sont un peu plus faibles pour $\alpha = 10$ que pour α infini. Ceci s'explique facilement en remarquant qu'au voisinage des petits côtés de la fondation $\alpha = 10$, i.e. pour y voisin de $\pm \frac{L}{2}$, les réactions sont très grandes, voir infinies (figure 4.17.). On conçoit bien alors qu'à résultante égale, les réactions au centre seront plus faibles que pour la bande infinie et c'est précisément pour y = 0 (figure 4.15) que l'écart est le plus important.

- moment (figure 4.16.)

Le même phénomène se produit dans le cas d'un moment mais il est d'amplitude négligeable. La figure 4.18. en effet, montre que les réactions, dans le cas $\alpha = 10$, dépendent très peu de y tant que y n'atteint pas les valeurs $\pm \frac{L}{2}$. Elles ne croissent brutalement que lorsque y devient très voisin de $\pm \frac{L}{2}$. Ceci explique que les courbes de distribution le long d'un axe parallèle à ox soient pratiquement confondues pour $\alpha = 10$ et α infini (figure 4.16.).

La comparaison précédente entre les cas $\alpha = 10$ et α infini montre que les répartitions de réactions suivant l'axe ox, sous charge centrée diffèrent légèrement. Les résultats concernant une valeur finie de α tendent parfois assez lentement quand α croît, vers leur valeur limite correspondant à α infini. Ainsi, sur la figure 4.19, la valeur de la réaction au centre de la fondation, sous une charge centrée, et pour $\frac{L}{B} = 10$ est plus voisine du cas $\frac{L}{B} = 1$ (fondation carrée) que de $\frac{L}{B}$ infinie (bande), ce qui peut surprendre. Nous retrouverons ce phénomène dans l'étude du noyau central (figure 6.7.).

Répartition des réactions suivant le petit axe ox



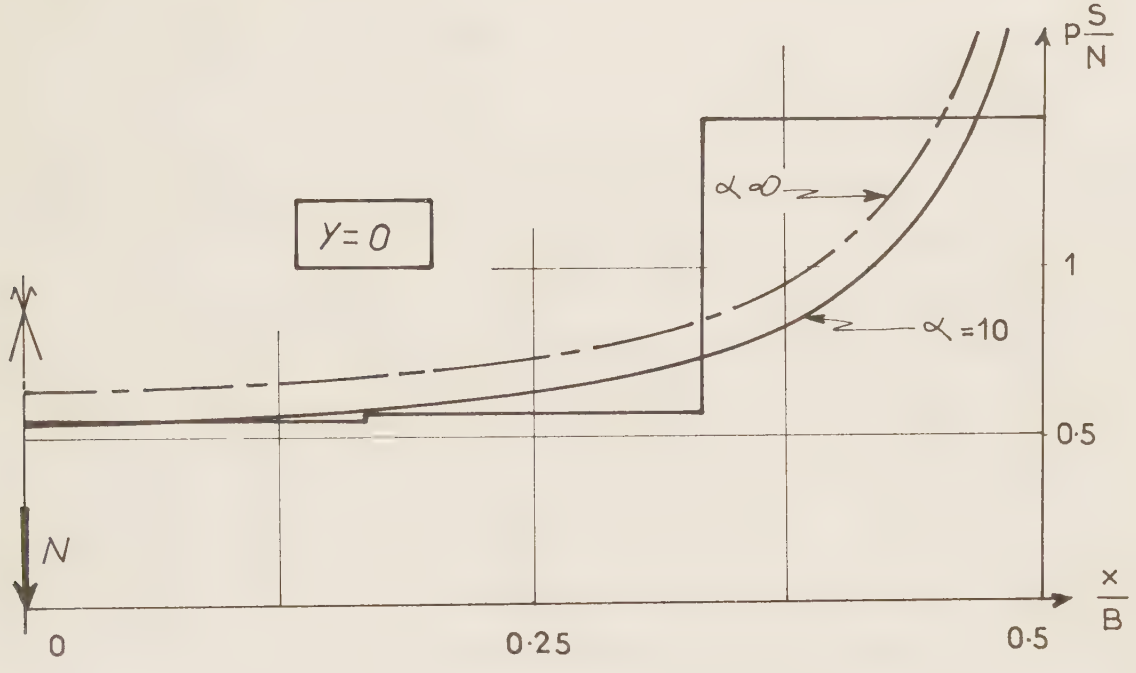


Figure 4.15 Charge normale centrée N.

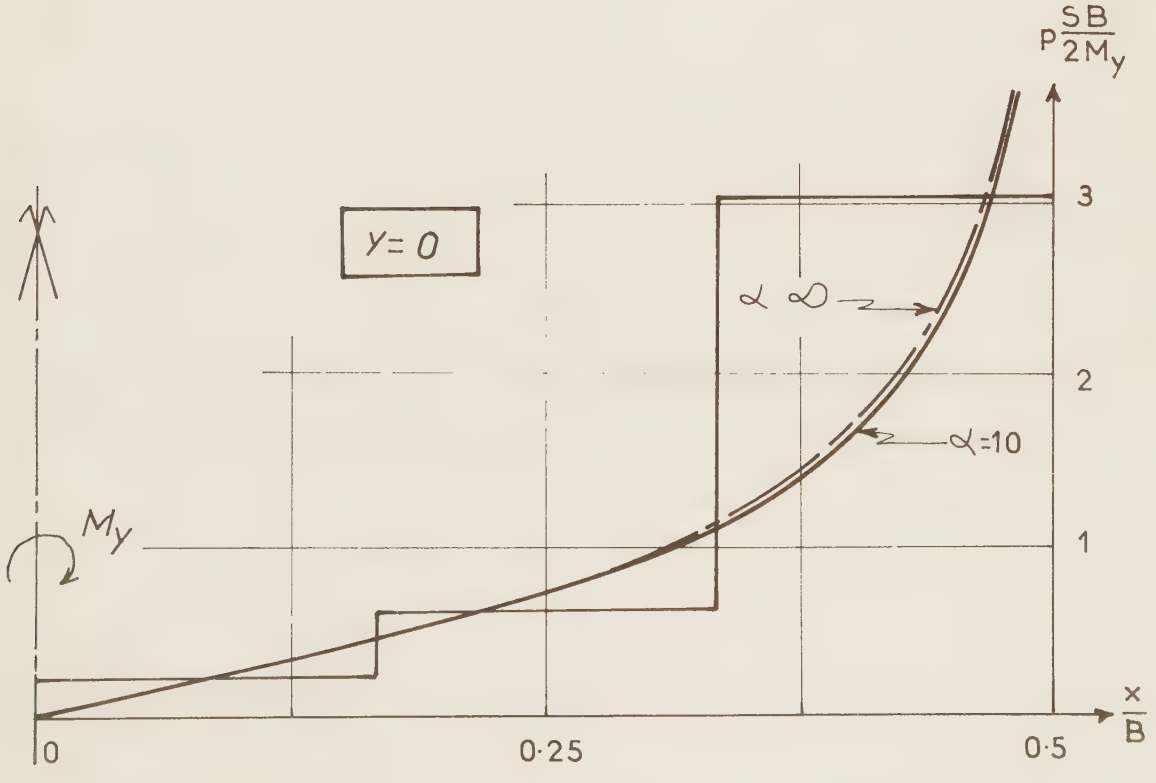


Figure 4.16 Moment M_y

Répartition des réactions parallèlement au grand axe ($x = \frac{B}{4}$).

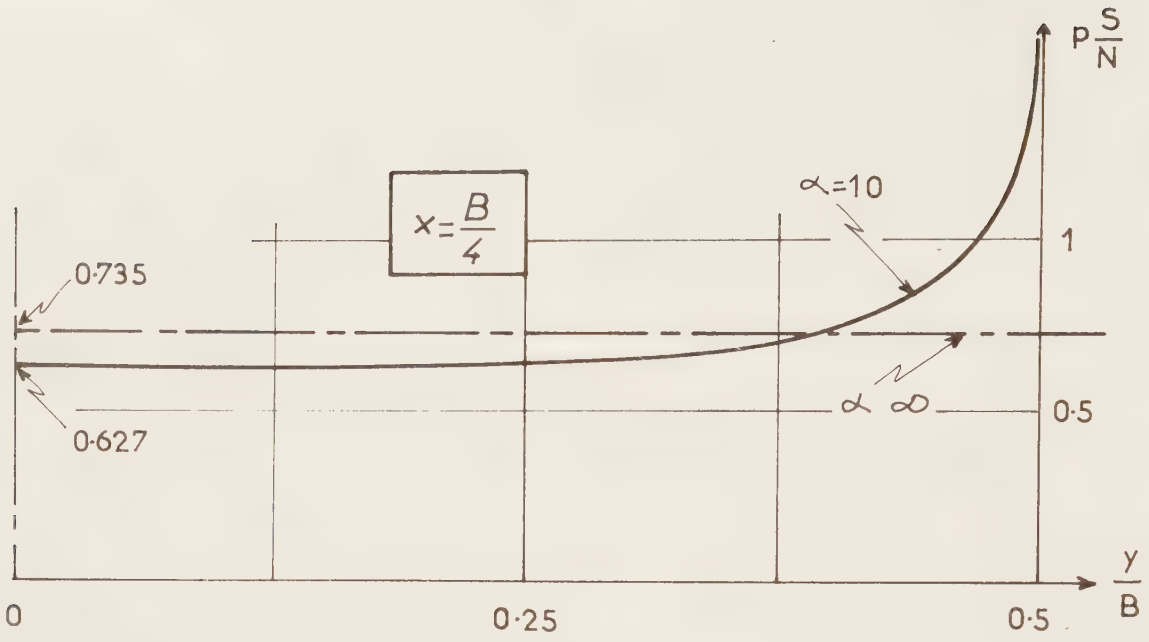


Figure 4.17. Charge normale centrée N.

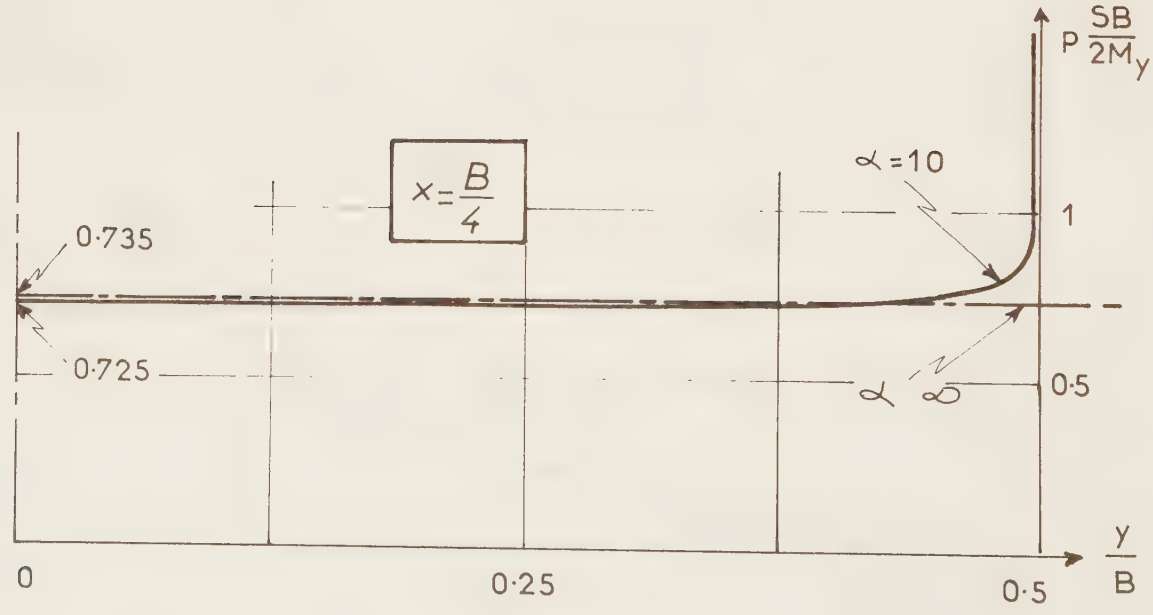


Figure 4.18. Moment M_y

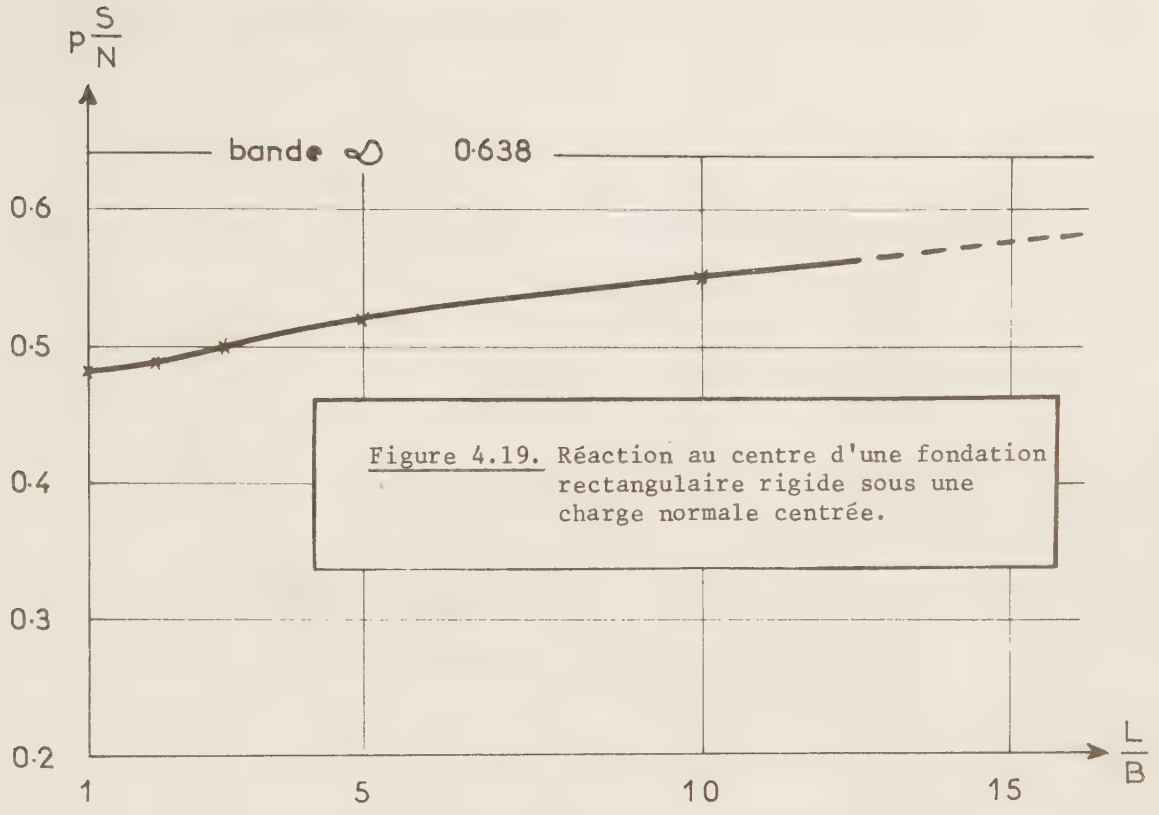


Figure 4.19. Réaction au centre d'une fondation rectangulaire rigide sous une charge normale centrée.

4.3.3. Conclusion

Les conclusions des deux paragraphes précédents (élimination de l'influence du découpage et bonne concordance entre les cas α infini et $\alpha = 10$), nous autorisent à penser que la méthode retenue pour déterminer les distributions de réactions est satisfaisante. Les valeurs proposées peuvent être considérées comme une bonne approche de la réalité ; elles sont, quoiqu'il en soit, un progrès sur les résultats obtenus par GORBUNOV-POSSADOV et TOUZOT (comparaison sur les figures 4.20 à 4.23). Elles conduisent d'ailleurs, quant au noyau central à des résultats beaucoup plus justes que ceux de GORBUNOV-POSSADOV (§ 6.3.).

Répartition des réactions sous une fondation carrée rigide.
Comparaison des résultats obtenus par différents auteurs.

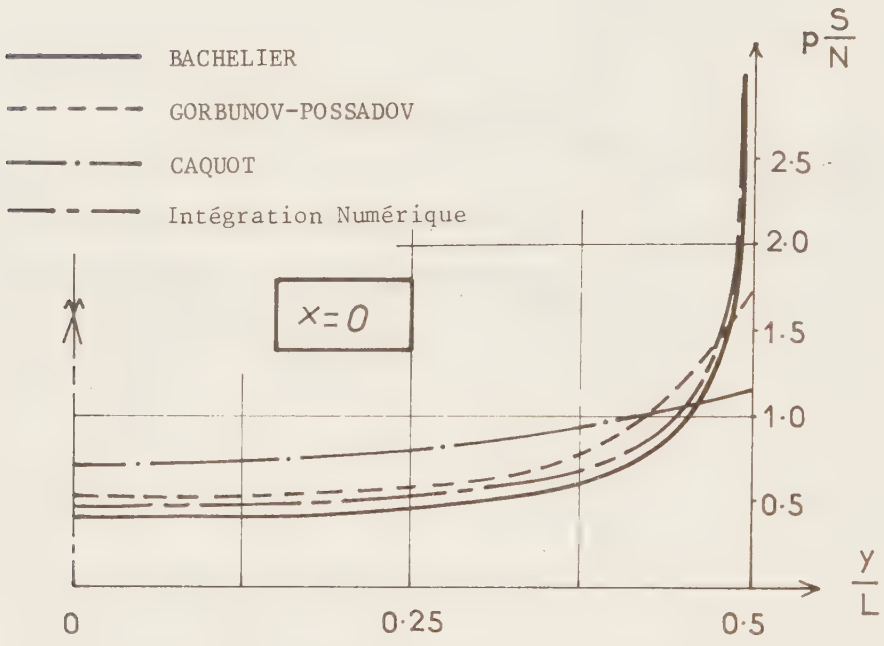


Figure 4.20. Réactions suivant le grand axe oy (x = 0) sous l'action d'une charge normale centrée N.

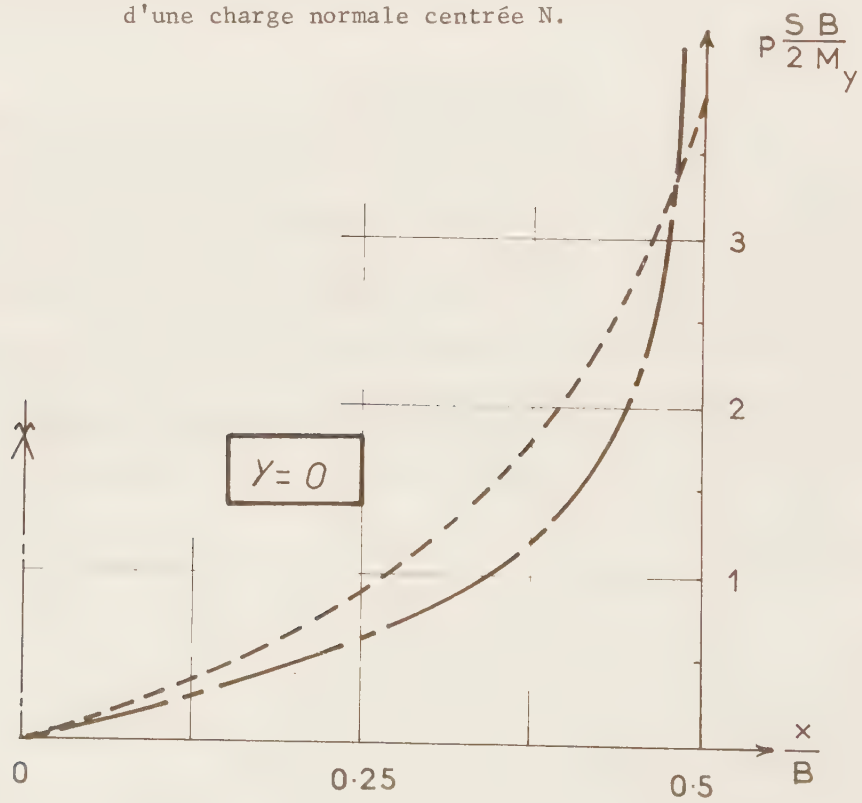


Figure 4.21. Réactions suivant le petit axe ox (y = 0) sous l'action d'un moment M_y.

Répartition des réactions suivant le petit axe ox (y = 0) d'une fondation rectangulaire rigide très longue.

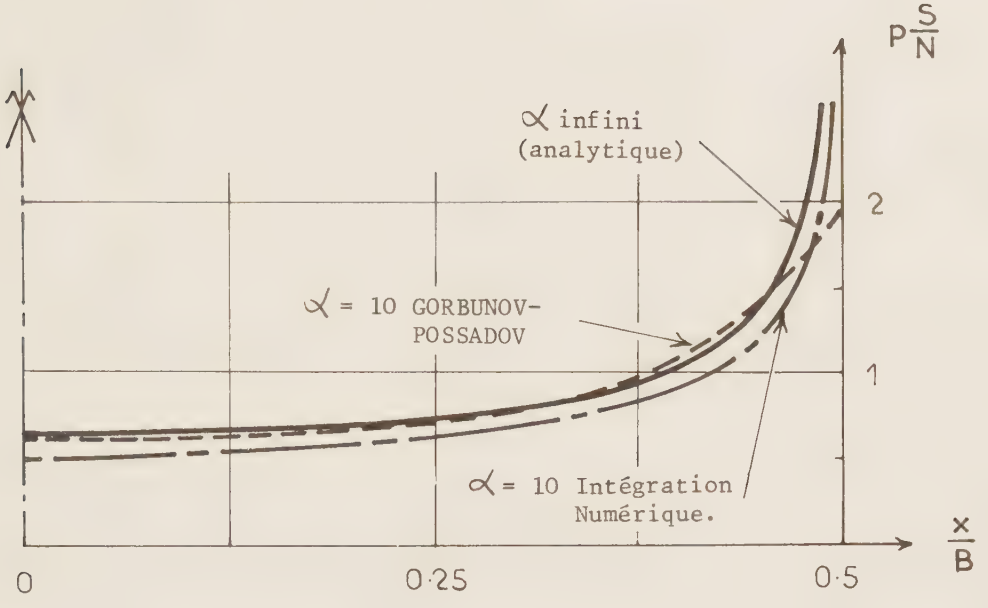


Figure 4.22. Charge normale centrée N.

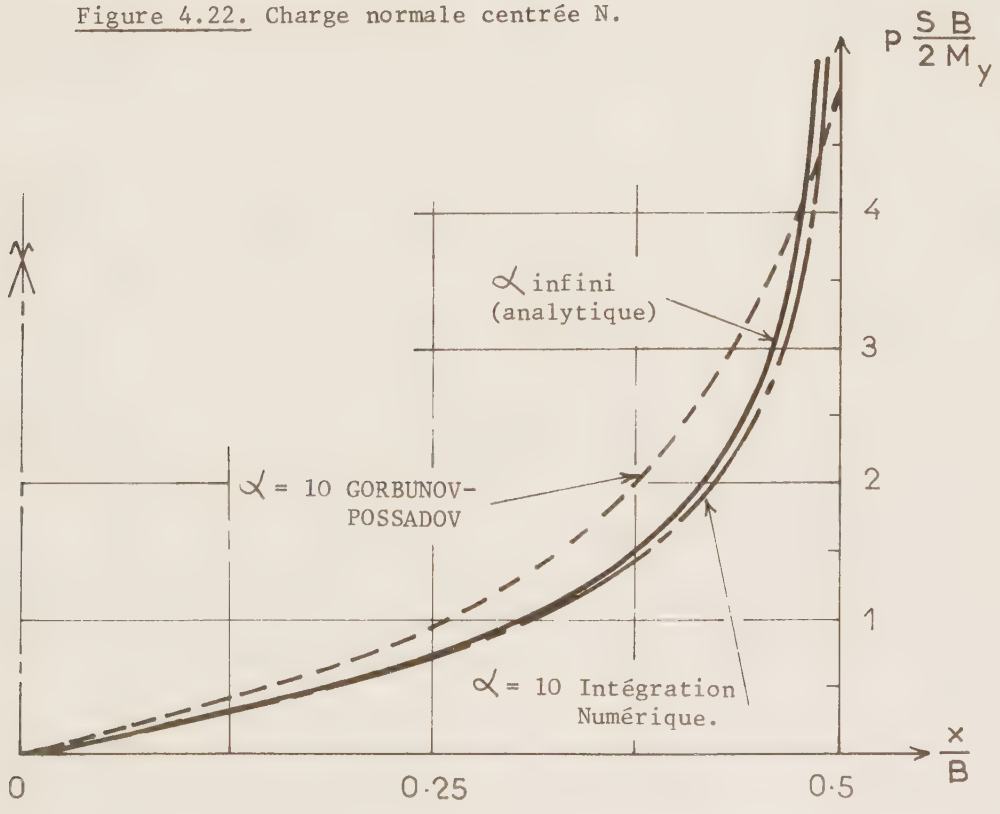


Figure 4.23. Moment M_y

4.4. Considérations sur les sols réels

4.4.1. Mesures de réactions

Dans les calculs ci-dessus, le massif est élastique homogène et isotrope ; la solution théorique conduit, nous l'avons vu, à des réactions infinies sous les bords qui ne peuvent évidemment exister dans les sols. Il se produit donc dans une zone au voisinage des bords, un écoulement plastique et une redistribution des contraintes.

Différents chercheurs ont effectué des mesures de réaction sous des fondations pour comparer les distributions théoriques aux distributions réelles. Notons que ces mesures sont très délicates, car la présence des sondes perturbe plus ou moins la répartition des contraintes.

SCHULTZE [27] a réuni 11 cas concernant des ouvrages rigides rectangulaires (un seul est un cercle) reposant sur différents sols. Pour 8 d'entre eux, la distribution est nettement concave (les contraintes sont plus grandes sous les bords qu'au centre) et pour 3 seulement, elle est convexe. L'auteur signale cependant que ces dernières mesures sont assez anciennes (1933 et 34) et qu'elles ont été faites à une époque où on avait une très petite expérience des jauges de contraintes.

SCHEUH a réalisé une étude sur modèle réduit pour une argile et un sable ; la fondation mesurait 6 cm sur 40 et était soumise à une charge centrée N. La distribution des réactions suivant le grand côté était obtenue à l'aide de dynamomètres à friction.

- La charge de 96 Kg appliquée à la fondation reposant sur l'argile est très loin de la charge limite ($\frac{1}{20}$ selon l'auteur). La zone en plasticité sous les bords est, par conséquent, très réduite et la redistribution des réactions affecte peu la forme de la courbe qui est en bon accord avec les courbes théoriques (figure 4.24.).

- La courbe expérimentale correspondant au cas de la fondation sur du sable semble, au contraire, en désaccord avec la théorie (figure 4.25). Il faut cependant se garder d'en tirer des conclusions trop hâtives.

Répartition expérimentale des réactions sous une fondation rigide (D'après SCHEUCH). Mesures sur modèle réduit (L = 40 cm, B = 6 cm).

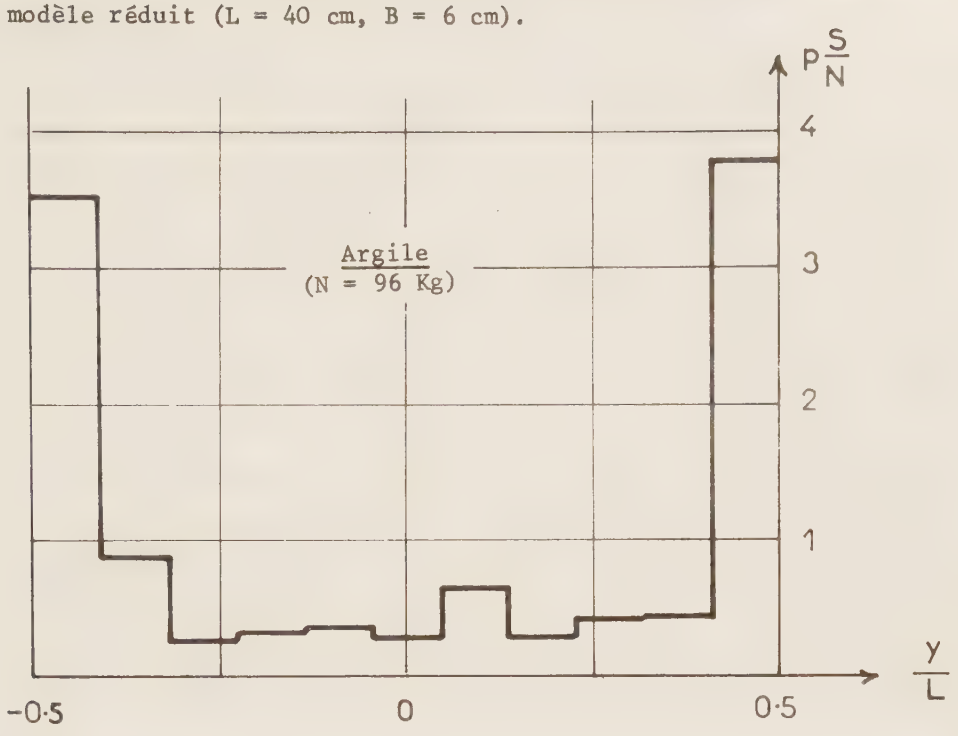


Figure 4.24. Fondation reposant sur de l'argile. Charge faible devant le charge de rupture.

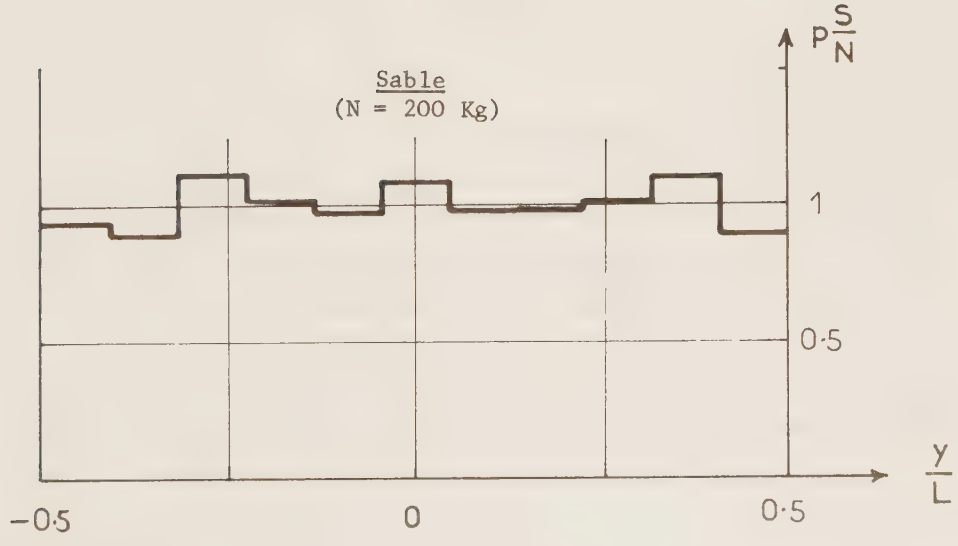


Figure 4.25. Fondation reposant sur du sable. Charge forte.

Deux remarques permettent en effet d'expliquer cette divergence :

On retrouve en premier lieu un phénomène caractéristique des sables. Du fait du défaut de cohésion, les grains de sable immédiatement sous les bords de la fondation peuvent se déplacer vers l'extérieur (refoulement du sol) ; il y a alors un transfert des charges de ces particules vers l'intérieur. On comprend ainsi pourquoi les plus grandes contraintes ne sont plus observées, même sous faible charge, sous le bord mais à une certaine distance de celui-ci (0.15 L comme l'a signalé l'auteur dans le cas de la figure 4.25).

La seconde remarque n'a pas été faite par SCHEUCH, mais elle nous semble très importante. La charge N appliquée dans le cas du sable est de 200 kg. Or, le calcul de la force portante par la formule de TERZAGHI qu'on peut appliquer puisque la fondation est longue ($\frac{L}{B} = 6,7$) conduit à une charge limite d'environ 290 Kg. Contrairement au cas de l'argile, la charge appliquée est donc assez voisine de la charge limite, ce qui explique que la courbe de répartition, qui sous charge faible était peut-être voisine des courbes théoriques, ait pu évoluer jusqu'à la courbe très différente relevée par l'expérience (la redistribution des contraintes a nécessairement été importante).

Les travaux effectués par LEUSSINK et SCHWEICKERT mettent clairement en évidence cette évolution. LEUSSINK et SCHWEICKERT [21] ont mesuré les réactions sous une fondation carrée rigide reposant sur un sable pour différentes charges allant jusqu'à la rupture. Dans les deux cas envisagés (fondation en surface ou légèrement enterrée), la distribution, de concave pour les faibles charges, (contraintes maxima près des bords), devient convexe lorsqu'on s'approche de la charge limite (contraintes maxima au centre) figure 4.26 et 4.27.

Le phénomène caractéristique des sables signalé précédemment et qui, même sous faible charge, tend à écarter du bord les contraintes maxima, apparaît nettement ici. Il est important lorsque la fondation est posée à la surface (figure 4.26.) mais se fait très peu sentir lorsqu'elle est légèrement enterrée (figure 4.27.). Dans ce cas en effet, les zones plastiques sous les bords ne peuvent se développer largement, car la présence des couches supérieures empêche le déplacement des particules vers l'extérieur.

Les essais de MURZENKO [22] ainsi que ceux de LAZEBNIK et SMIRNOV [19] sont parfaitement en accord avec ceux de LEUSSINK.

Répartition des réactions suivant la diagonale d'un carré rigide de 1 m de côté reposant sur du sable (ϕ = 40°, = 1.89 t/m3). Charge normale centrée. D'après les essais de LEUSSINK et SCHWEICKERT.

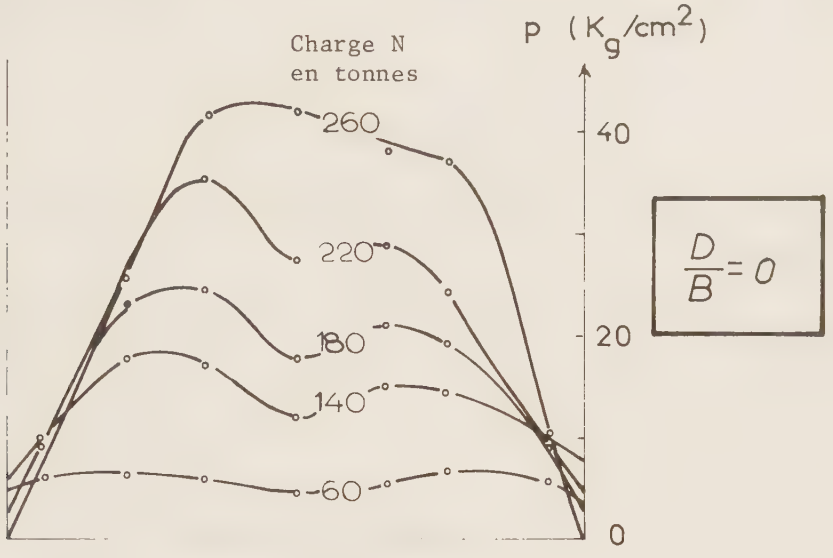


Figure 4.26. Fondation posée en surface ($\frac{D}{B}$ = 0).

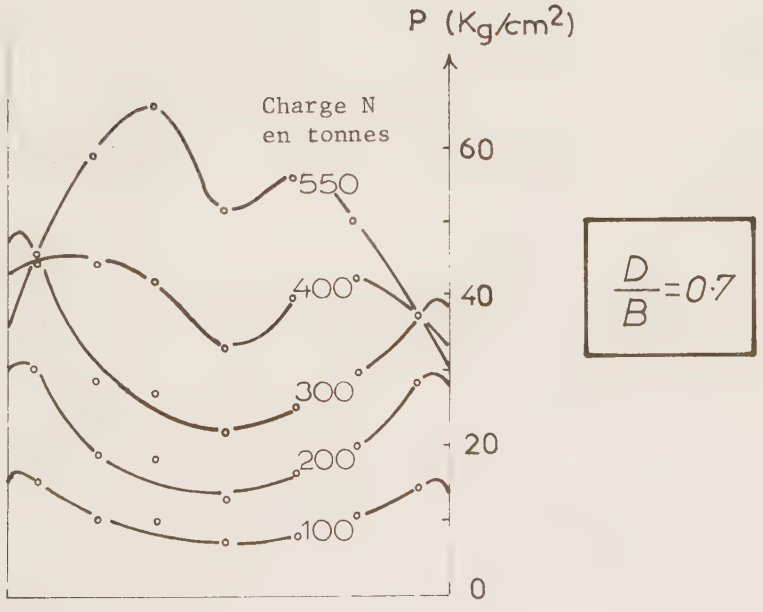


Figure 4.27. Fondation enterrée ($\frac{D}{B}$ = 0.7).

Le schéma théorique proposé par SCHULTZE permet précisément de rendre compte de l'influence de la profondeur de la fondation, de l'intensité de la charge et des valeurs des caractéristiques mécaniques (ϕ, C et γ) du massif.

4.4.2. Travaux de SCHULTZE

SCHULTZE a étudié sous une bande infinie rigide la modification de la distribution des réactions selon BOUSSINESQ, du fait des phénomènes plastiques marginaux.

Il suppose pour cela que la pression limite que l'on peut atteindre en un point d'abscisse x est donnée par la formule de PRANDTL-BUISMAN :

$$p_p(x) = C N_c + \gamma D N_q + 2\gamma B N_\gamma \left(1 - \frac{x}{B/2}\right)$$

ce qui conduit à une répartition linéaire de ces pressions limites (figure 4.28.).

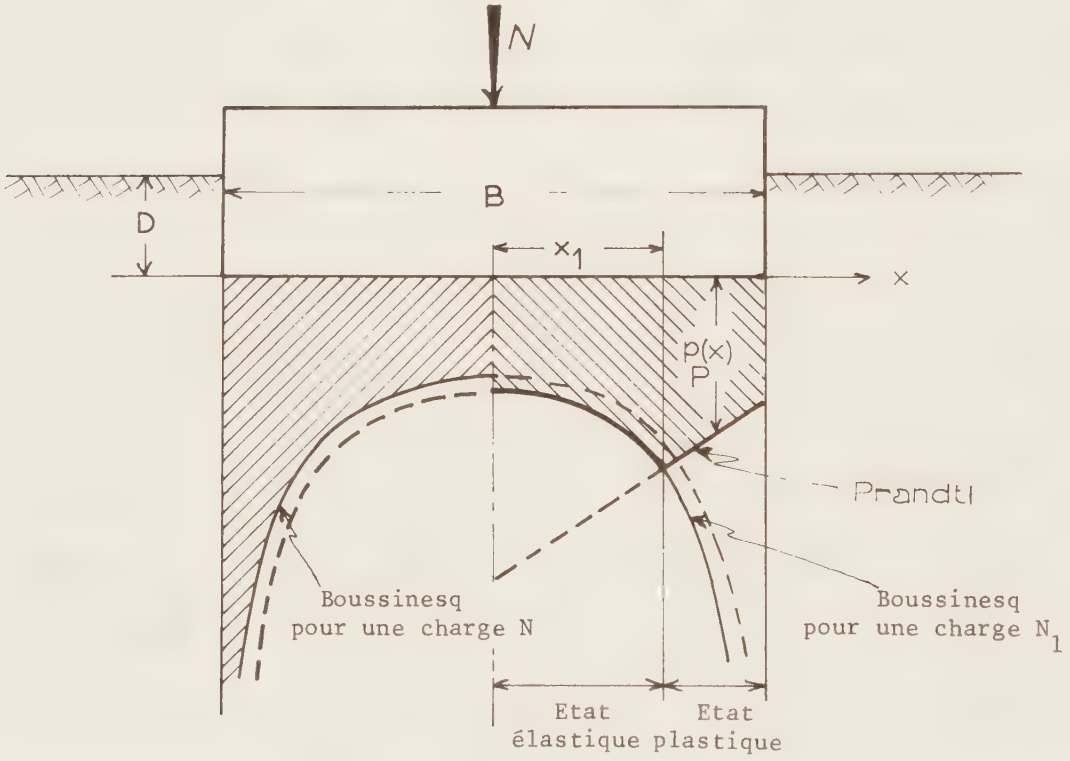


Figure 4.28.

La répartition réelle suit donc celle de BOUSSINESQ

$$p_B(x) = \frac{N}{\pi B/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{B/2}\right)^2}}$$

pour tous les points où $p_B(x)$ est inférieur à $p_p(x)$, et celle de PRANDTL-BUISMAN dans le cas contraire. Le point (d'abscisse x_1) intersection de ces deux distributions sépare le sol au contact de la fondation en deux zones : état élastique pour $x < x_1$ et plastique pour $x > x_1$.

Cependant, comme on remplace au voisinage du bord les contraintes dues à BOUSSINESQ par des contraintes plus faibles (PRANDTL), une correction est à apporter pour respecter l'égalité des résultantes. On remplace pour cela la distribution de BOUSSINESQ pour N par celle que provoque une charge N_1 légèrement supérieure, de façon que la résultante des pressions ne change pas (aires hachurées égales sur la figure 4.28.).

Les deux inconnues x_1 et N_1 sont alors déterminées en écrivant cette égalité des aires et l'égalité

$$p_B(x_1) = p_p(x_1)$$

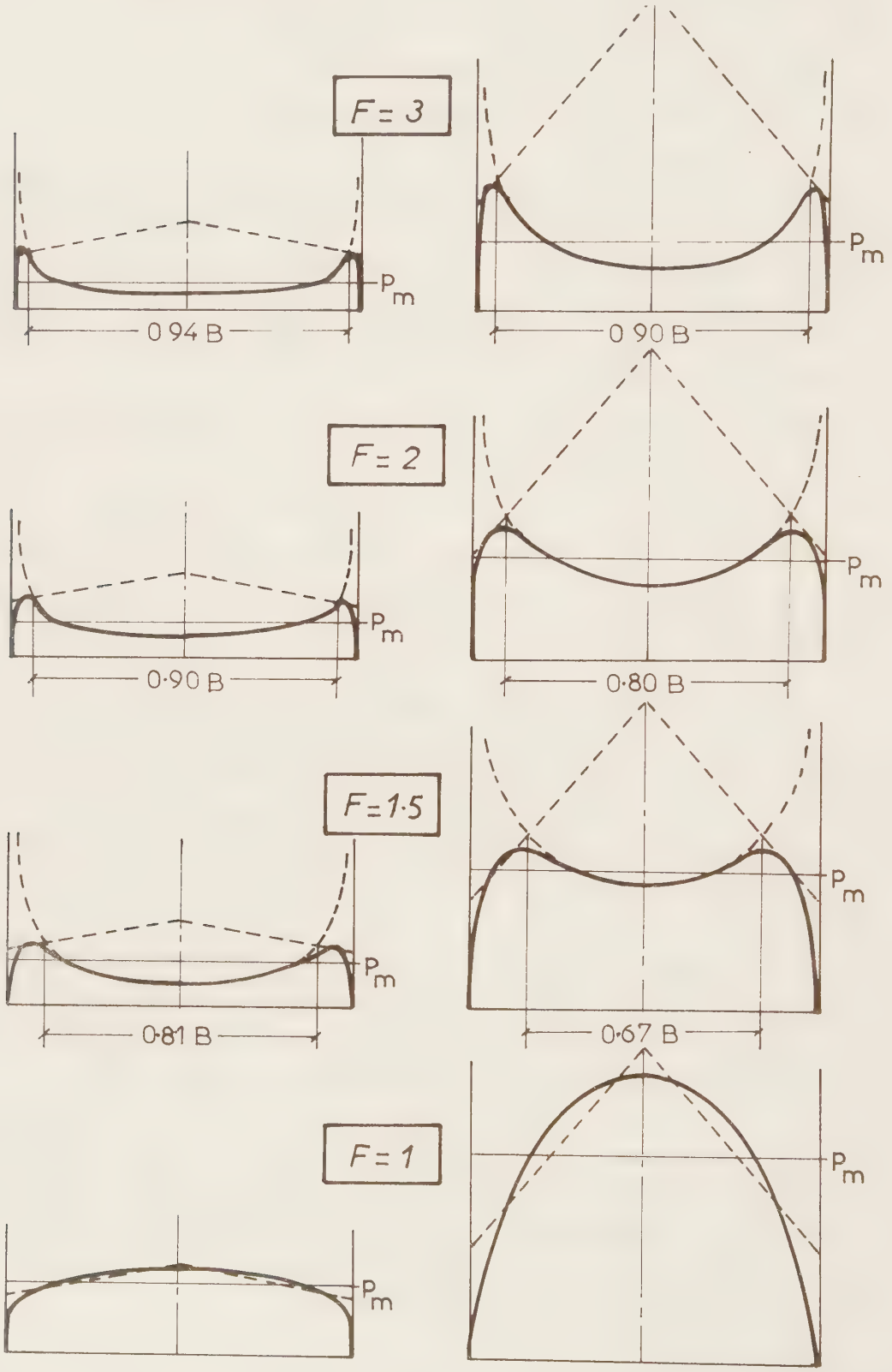
Les résultats concernant une argile et un sable pour différentes valeurs du coefficient de sécurité F (rapport de la force portante à la charge N appliquée) sont reproduits sur la figure 4.29.

On constate, en premier lieu, que pour un fonctionnement normal de la fondation (F = 2 ou 3), le domaine plastique est très réduit ; il n'occupe pour F = 3 que 6 % de la largeur de la fondation dans le cas de l'argile étudiée et 10 % pour le sable. Les répartitions calculées en élasticité sont donc peu altérées (sauf bien sûr immédiatement sous les bords). Signalons toutefois que les répartitions de la figure 4.29. ont été calculées pour une fondation enterrée à $\frac{D}{B} = 0.5$.

L'influence de la profondeur de la fondation mise en évidence dans les travaux expérimentaux de LEUSSINK et SCHWEICKERT est, comme le montre la figure 4.30., importante pour le sable, mais sans grande influence pour l'argile si sa cohésion est assez forte (1 bar pour l'exemple de la figure 4.30).

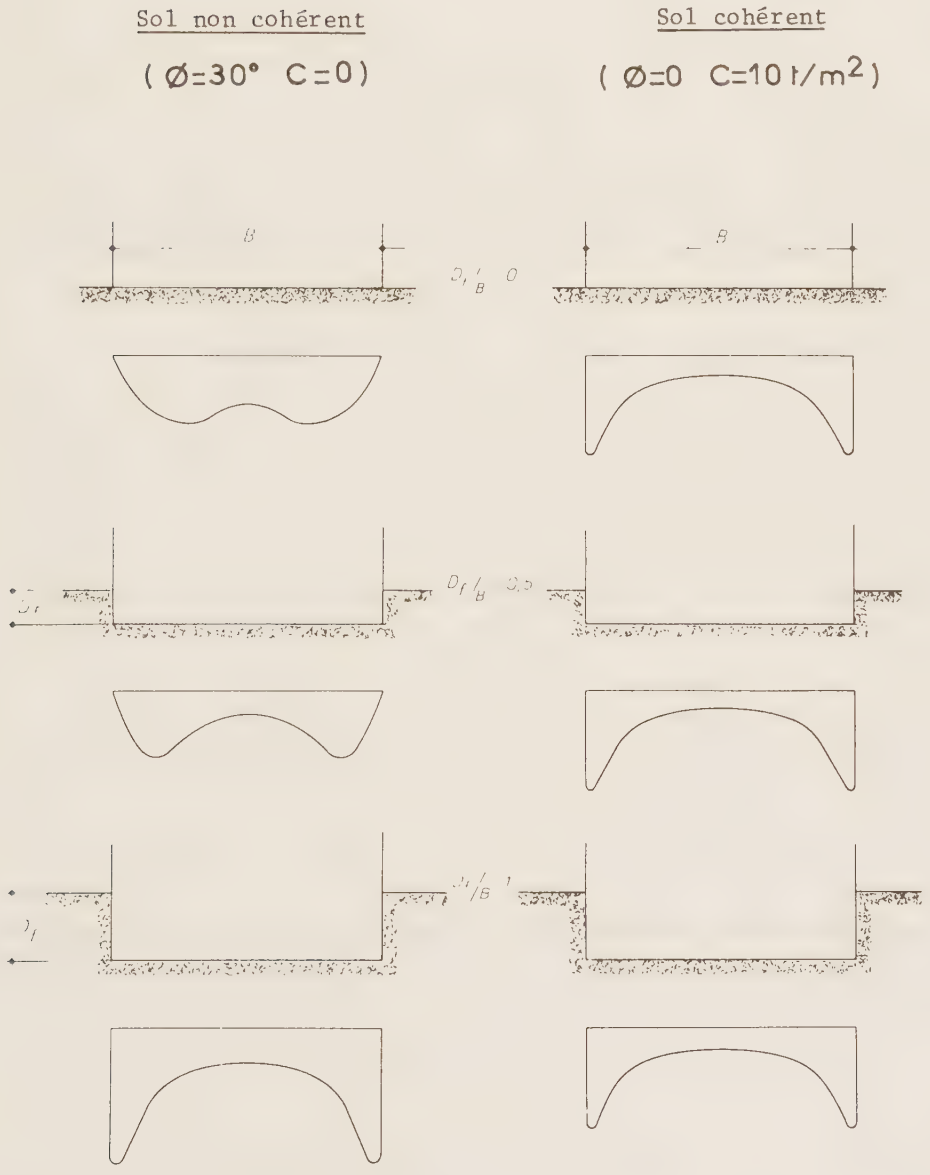
En conclusion, nous pouvons retenir que si la charge appliquée reste faible devant la charge limite (F = 2 ou 3), les distributions de réactions prévues par l'élasticité sont peu altérées par les phénomènes plastiques marginaux lorsque le massif est doué de cohésion. Pour un sol non cohérent, il est nécessaire que la fondation soit légèrement enterrée.

Figure 4.29. Répartition théorique des réactions sous une bande infinie de largeur B enterrée à $\frac{B}{2}$, pour différentes charges. D'après SCHULTZE.
(Le coefficient de sécurité F est le rapport de la charge de rupture à la charge appliquée).



Argile (Ø = 15°, C = 1 t/m^2, γ = 1.6 t/m^3) Sable (Ø = 30°, C = 0, γ = 1.6 t/m^3)

Figure 4.30. Répartition théorique des réactions sous une bande infinie de largeur B pour un coefficient de sécurité F = 2.
Influence de la profondeur de la fondation.



Quoi qu'il en soit, la méthode de SCHULTZE permet dans tous les cas, même pour un faible coefficient de sécurité, de déterminer au moins qualitativement les modifications à apporter aux répartitions calculées en élasticité. Notons cependant que ces dernières sont, pour les efforts dans la fondation, dans le sens de la sécurité.

5. - CONTRAINTES AU SEIN DU MASSIF

Nous avons calculé toutes les contraintes, à différentes profondeurs, sous le centre et sous le coin des fondations rectangulaires pour les trois cas de charge N, M_x et M_y.

5.1. Méthode de calcul

Nous avons pour cela remplacé les contraintes agissant au niveau de chacun des carrés élémentaires par leurs résultantes P_{ij} calculées au début de cette étude. Nous savons que cette approximation qui consiste à remplacer une charge répartie par sa résultante, entraîne une erreur sur les contraintes au sein du massif, très vite négligeable dès lors qu'on s'éloigne du point d'application de la force (GIROUD [14]).

De façon plus précise, cette méthode ne permet pas le calcul des contraintes σ et τ immédiatement sous la fondation (z = 0) et nous verrons plus loin comment nous avons alors procédé (§ 5.2.2. et 5.3.2.).

Mais, pour les valeurs non nulles de z où nous avons également effectué les calculs ($\frac{z}{B}$ = 0.2, 0.4, etc...), l'approximation est suffisante. Nous l'avons en effet vérifié indirectement en calculant les contraintes au sein du massif ($z \neq 0$) pour une fondation carrée découpée en 100 puis 400 carrés élémentaires ; nous avons ainsi remarqué que, même pour les faibles valeurs de z ($\frac{z}{B}$ = 0.2, 0.4) les résultats diffèrent de moins de 0.2 %.

Les contraintes au sein du massif s'obtiennent facilement (avec l'aide d'un ordinateur !) en sommant les contraintes dues aux différentes charges concentrées P_{ij}. Les formules de BOUSSINESQ [4] et CERRUTI [7] (cf GIROUD [14]) donnent pour expression des contraintes en un point P(X, Y, Z) du sol sous l'action d'une force normale F exercée à la surface :

$$\sigma_x = \left[\frac{3x^2}{2\pi r^5} z - (1-2\nu)\frac{(x^2+z^2)(z+r) - r y^2}{2\pi r^3 (z+r)^2}\right] F$$

$$\sigma_y = \left[\frac{3y^2}{2\pi r^5} z - (1-2\nu)\frac{(y^2+z^2)(z+r) - r x^2}{2\pi r^3 (z+r)^2}\right] F$$

$$\sigma_z = \frac{3z^3}{2\pi r^5} F$$

$$\tau_{xy} = \frac{3xy}{2\pi r^5} z F - (1-2\nu)\frac{xy(z+2r)}{2\pi r^3 (z+r)^2} F$$

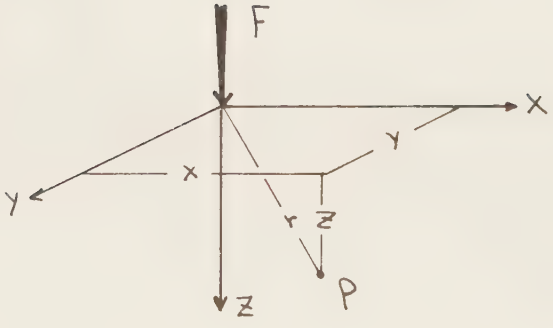
$$\tau_{yz} = \frac{3yz}{2\pi r^5} z F$$

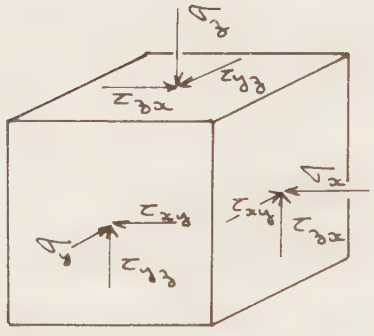
$$\tau_{zx} = \frac{3zx}{2\pi r^5} z F$$

Nous pouvons en déduire l'égalité :

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{1+\nu}{\pi} \frac{z}{r^3} F$$

qui permettra un contrôle des résultats.



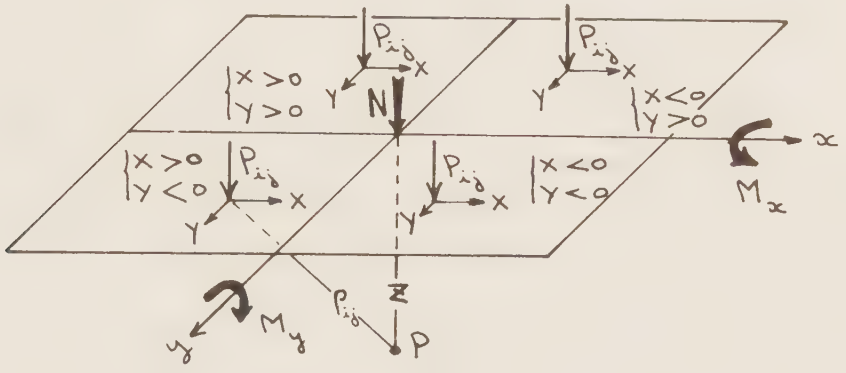


Convention de signe : sur cette figure, toutes les contraintes sont positives.

5.2. Contraintes sous le centre

5.2.1. Calcul pour z ≠ 0

Nous avons calculé les contraintes à la profondeur z en sommant les contraintes dues à toutes les résultantes P_{ij}. Les signes affectés aux P_{ij} dans les différentes zones sont fonction du cas de charge envisagé.



- Charge normale centrée N

Les trois contraintes de cisaillement sont nulles et nous donnons σ_x, σ_y et σ_z sous la forme

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{N}{S}\left[\overline{P_x^\circ} - (1-2\nu)\,\overline{P_x^\circ}'\right] \\ \sigma_y = \dfrac{N}{S}\left[\overline{P_y^\circ} - (1-2\nu)\,\overline{P_y^\circ}'\right] \\ \sigma_z = \dfrac{N}{S}\,\overline{P_z^\circ} \end{cases}$$

Les coefficients $\overline{P_x^\circ}$, $\overline{P_x^\circ}'$, $\overline{P_y^\circ}$, $\overline{P_y^\circ}'$ et $\overline{P_z^\circ}$ ne dépendent que de z et de α.

- Moment M_y

Seule τ_{zx} n'est pas nulle et nous proposons :

$$\tau_{zx} = -\frac{N}{S}\, e_x\, \overline{Q_{zx}^\circ} \qquad \text{avec} \qquad N e_x = \frac{M_y}{B}$$

- Moment M_x

Seule τ_{yz} n'est pas nulle.

$$\tau_{yz} = -\frac{N}{S}\, e_y\, \overline{R_{yz}^\circ} \qquad \text{avec} \qquad N e_y = \frac{M_x}{L}$$

Nous avons calculé les coefficients $\overline{P}$, $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ précédents pour les valeurs suivantes de z et α:

$\frac{z}{B}$ = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 2, 2.5, 3, 4, 5, 10, 15, 20 et 50.

α = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 5 et 10.

5.2.2. Calcul des contraintes à la côte z = 0

Comme nous l'avons signalé dans le § 5.1., l'intégration numérique des formules de BOUSSINESQ ne permet pas le calcul des contraintes à z = 0 et nous avons dû utiliser une autre méthode.

• Contraintes normales

Nous connaissons immédiatement sous la fondation (z = 0) la valeur de σ_z ; elle doit être égale en tout point à la réaction déterminée en 4.2.

Nous avons alors calculé σ_x (respectivement σ_y) en admettant qu'au centre de la fondation, le rapport $\frac{\sigma_x}{\sigma_z}$ (resp. $\frac{\sigma_y}{\sigma_z}$) est le même, qu'elle soit rigide ou souple et uniformément chargée. Notons que cette hypothèse est exactement vérifiée pour les deux cas connus du cercle et de la bande infinie.

• Contraintes tangentielles

Etant donné les conditions aux limites (fondation lisse), τ_{zx} et τ_{yz} sont nulles en surface. Quant à τ_{xy} elle est, par raison de symétrie nulle, en tout point de l'axe oz.

5.2.3. Contrôles

• Contrôle direct des contraintes normales

Nous avons vu (§ 5.1.) que, sous l'action d'une charge concentrée F provoquant σ_x, σ_y et σ_z au point p, nous avions la relation :

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{1+\nu}{\pi} \cdot \frac{z}{r^3} F$$

Elle se traduit ici, avec les expressions proposées, par :

$$\frac{N}{S}\left[\overline{P_x^\circ} + \overline{P_y^\circ} + \overline{P_z^\circ} - (1-2\nu)\left(\overline{P_x^{\circ\prime}} + \overline{P_y^{\circ\prime}}\right)\right] = 4\,\frac{1+\nu}{\pi}\,z \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{P_{ij}}{\rho_{ij}^3}$$

D'où la double égalité :

$$\frac{N}{S}\left(\overline{P_x^\circ} + \overline{P_y^\circ} + \overline{P_z^\circ} - \overline{P_x^{\circ\prime}} - \overline{P_y^{\circ\prime}}\right) = \frac{4}{\pi}\,z \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{P_{ij}}{\rho_{ij}^3} = 2\,\frac{N}{S}\left(\overline{P_x^{\circ\prime}} + \overline{P_y^{\circ\prime}}\right)$$

ρ_{ij} est la distance séparant C_{ij} du point P où sont calculées les contraintes.

Les programmes ont été écrits de façon à vérifier que pour chaque calcul de σ_x, σ_y et σ_z, ces deux égalités étaient bien respectées.

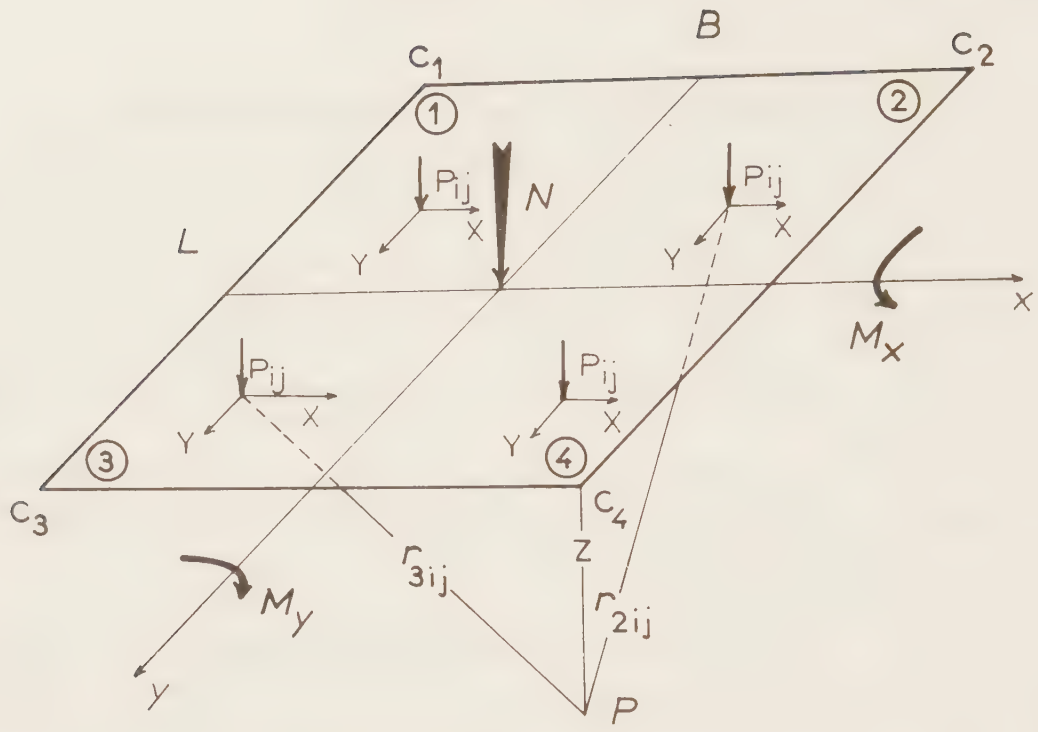
• Relation avec la charge linéairement répartie

Lorsque la profondeur du point P où sont calculées les contraintes augmente, la distribution de la charge a de moins en moins d'importance ; les coefficients $\overline{P}$, $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ doivent donc devenir voisins de ceux du rectangle "souple" calculés par GIROUD [15]. Nous avons pu vérifier qu'il en était bien ainsi, sans pour autant pouvoir donner de façon générale une profondeur à partir de laquelle les deux distributions sont à peu près confondues ; cette profondeur est, en effet, fonction de la contrainte considérée, et du rapport α. La figure 5.6. permet toutefois de comparer ces deux distributions pour $\alpha = 5$.

5.3. Contraintes sous le coin

5.3.1. Calcul pour z ≠ 0

Le principe est le même que pour les contraintes sous le centre (intégration numérique des formules de BOUSSINESQ). Le calcul est cependant un peu plus délicat car les résultats dépendent du coin considéré et, la symétrie n'existant plus, il faut traiter séparément les quatre quarts de la fondation.



Nous avons calculé les contraintes sous le coin C_4 (qui correspond à X et Y positifs) et nous verrons au § 5.3.4. comment nous pouvons en déduire les résultats relatifs aux autres coins du rectangle.

Notons que les calculs à l'ordinateur sont assez longs du fait du très grand nombre d'opérations à effectuer. Nous avons obtenu les contraintes pour les mêmes valeurs de α et $\frac{z}{B}$ que dans le § 5.2. Les résultats sont présentés sous la forme :

Charge centrée N

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{N}{S}\left[\overline{P_x^c} - (1-2\nu)\overline{P_x^{c'}}\right] \\ \sigma_y = \frac{N}{S}\left[\overline{P_y^c} - (1-2\nu)\overline{P_y^{c'}}\right] \\ \sigma_z = \frac{N}{S}\overline{P_z^c} \\ \tau_{xy} = \frac{N}{S}\left[\overline{P_{xy}^c} - (1-2\nu)\overline{P_{xy}^{c'}}\right] \\ \tau_{yz} = \frac{N}{S}\overline{P_{yz}^c} \\ \tau_{zx} = \frac{N}{S}\overline{P_{zx}^c} \end{cases}$$

Dans le cas d'un moment, les expressions proposées sont sensiblement les mêmes ; il suffit de remplacer :

- pour un moment M_y, $\frac{N}{S}$ par $\frac{M_y}{SB}$ et les coefficients $\overline{P^c}$ par des coefficients $\overline{Q^c}$
- pour un moment M_x, $\frac{N}{S}$ par $\frac{M_x}{SL}$ et les coefficients $\overline{P^c}$ par $\overline{R^c}$.

5.3.2. Contraintes à la côte z = 0

Les contraintes sous le coin, pour z = 0 sont toutes infinies ;

- σ_z, τ_{yz} et τ_{zx} ne dépendant pas de ν s'expriment par un seul coefficient qui est alors nécessairement infini.
- σ_x, σ_y et τ_{yz} dépendent, au contraire, de ν et sont la différence de deux termes. Nous avons supposé que chacun d'eux tendait vers l'infini quand z tend vers 0. Ce cas se produit notamment pour la contrainte σ_θ sous le bord du cercle rigide (analytique).

5.3.3. Contrôles

- Contrôle direct des contraintes normales

La relation $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{1+\nu}{\pi} \cdot \frac{z}{r^3}$ signalée en 5.1. conduit ici aux égalités suivantes :

. Charge normale centrée N :

$$\frac{N}{S}\left(\overline{P}^c_x + \overline{P}^c_y + \overline{P}^c_\delta - \overline{P}^{c'}_x - \overline{P}^{c'}_y\right) = 2\,\frac{N}{S}\left(\overline{P}^{c'}_x + \overline{P}^{c'}_y\right)$$

$$= \frac{z}{\pi} \sum_\lambda \sum_\delta P_{\lambda\delta}\left(\frac{1}{r^3_{1\lambda\delta}} + \frac{1}{r^3_{2\lambda\delta}} - \frac{1}{r^3_{3\lambda\delta}} - \frac{1}{r^3_{4\lambda\delta}}\right)$$

. Moment M_y ;

$$\frac{M_y}{SB}\left(\overline{Q}^c_x + \overline{Q}^c_y + \overline{Q}^c_\delta - \overline{Q}^{c'}_x - \overline{Q}^{c'}_y\right) = 2\,\frac{M_y}{SB}\left(\overline{Q}^{c'}_x + \overline{Q}^{c'}_y\right)$$

$$= \frac{z}{\pi} \sum_\lambda \sum_\delta P_{\lambda\delta}\left(-\frac{1}{r^3_{1\lambda\delta}} + \frac{1}{r^3_{2\lambda\delta}} - \frac{1}{r^3_{3\lambda\delta}} + \frac{1}{r^3_{4\lambda\delta}}\right)$$

. Moment M_x :

$$\frac{M_x}{SL}\left(\overline{R}^c_x + \overline{R}^c_y + \overline{R}^c_\delta - \overline{R}^{c'}_x - \overline{R}^{c'}_y\right) = 2\,\frac{M_x}{SL}\left(\overline{R}^{c'}_x + \overline{R}^{c'}_y\right)$$

$$= \frac{z}{\pi} \sum_\lambda \sum_\delta P_{\lambda\delta}\left(-\frac{1}{r^3_{1\lambda\delta}} - \frac{1}{r^3_{2\lambda\delta}} + \frac{1}{r^3_{3\lambda\delta}} + \frac{1}{r^3_{4\lambda\delta}}\right)$$

P_{ij} sont relatives successivement aux distributions de réactions sous une charge centrée, un moment M_y et un moment M_x.

Les programmes ont permis de s'assurer que ces doubles égalités étaient bien toujours vérifiées.

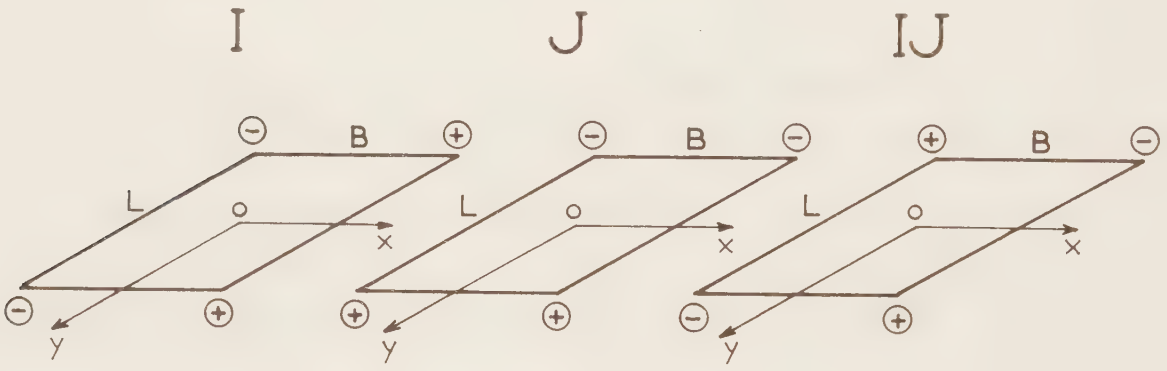
- Relation avec la charge uniformément répartie

Comme dans le cas des calculs sous le centre, nous avons pu contrôler que pour les fortes valeurs de $\frac{z}{B}$, les contraintes ainsi calculées étaient très voisines de celles provoquées par la même résultante N (ou le même moment) lorsque la charge est linéairement répartie sur le rectangle.

5.3.4. Relation entre les résultats relatifs aux différents coins

Remarquons d'abord qu'en raison des symétries de la fondation et pour chacun des cas de charge envisagé les contraintes sous les quatre coins ne diffèrent que par leur signe.

Définissons donc deux coefficients I et J valant + 1 ou - 1, suivant le coin sous lequel on se place, selon les schémas ci-dessous :



Il est alors facile de démontrer que, les contraintes sous l'un quelconque des coins, auront pour expressions :

$$\sigma_x = \frac{N}{S}\left\{\overline{P_x^c} - (1-2\nu)\overline{P_x^{c'}} + Ie_x\left[\overline{Q_x^c} - (1-2\nu)\overline{Q_x^{c'}}\right] + Je_y\left[\overline{R_x^c} - (1-2\nu)\overline{R_x^{c'}}\right]\right\}$$

$$\sigma_y = \frac{N}{S}\left\{\overline{P_y^c} - (1-2\nu)\overline{P_y^{c'}} + Ie_x\left[\overline{Q_y^c} - (1-2\nu)\overline{Q_y^{c'}}\right] + Je_y\left[\overline{R_y^c} - (1-2\nu)\overline{R_y^{c'}}\right]\right\}$$

$$\sigma_z = \frac{N}{S}\left\{\overline{P_z^c} + Ie_x\,\overline{Q_z^c} + Je_y\,\overline{R_z^c}\right\}$$

$$\tau_{xy} = \frac{N}{S}\left\{ II\left[\overline{P^c_{xy}} - (1-2\nu)\overline{P^{c'}_{xy}}\right] + Je_x\left[\overline{Q^c_{xy}} - (1-2\nu)\overline{Q^{c'}_{xy}}\right] + Ie_y\left[\overline{R^c_{xy}} - (1-2\nu)\overline{R^{c'}_{xy}}\right]\right\}$$

$$\tau_{yy} = \frac{N}{S}\left\{ J\overline{P^c_{yy}} + IIe_x\overline{Q^c_{yy}} + e_y\overline{R^c_{yy}}\right\}$$

$$\tau_{yx} = \frac{N}{S}\left\{ I\overline{P^c_{yx}} + e_x\overline{Q^c_{yx}} + IJe_y\overline{R^c_{yx}}\right\}$$

avec

$$Ne_x = \frac{M_y}{B} \qquad \text{et} \qquad Ne_y = \frac{M_x}{L}$$

Les expressions ci-dessus permettent ainsi le calcul de toutes les contraintes sous l'un quelconque des coins et pour tout cas de charge à résultante verticale (centrée ou non).

5.3. Résultats

Il n'est pas possible de reproduire dans le cadre de cette thèse tous les résultats obtenus. Ils feront l'objet d'une publication spéciale. Nous donnons à titre d'exemple dans les tableaux 5.1. les valeurs des coefficients relatifs à la fondation rectangulaire ($\frac{L}{B} = 3$).

Les figures 5.2. et 5.3. montrent l'influence du rapport $\frac{L}{B}$ sur σ_y et σ_x.

On a comparé sur les figures 5.4. et 5.5. certains résultats obtenus ici pour la fondation carrée rigide avec ceux de GORBUNOV-POSSADOV et ceux de CAQUOT et KERISEL.

Enfin, la figure 5.6. réunit les courbes distributions de contraintes sous le centre d'une aire rectangulaire uniformement chargée et d'une fondation rigide supportant la même résultante. Les contraintes dues à l'une et à l'autre sont très différentes à faible profondeur, ce qui interdit d'utiliser les distributions obtenues pour une fondation souple dans le calcul indirect (oedomètre ou triaxial) du tassement de la fondation rigide de même forme.

Tableau 5.1.a. Contraintes normales et tangentielles sous le centre d'une fondation rectangulaire rigide ($\frac{L}{B} = 3$). Charge centrée N et moments M_x et M_y.

Z/B	$\bar{P}^{\circ}_{z}$	$\bar{P}^{\circ}_{x}$	$\bar{P}^{\circ\,-}_{x}$	$\bar{P}^{\circ\,-}_{y}$	$\bar{P}^{\circ}_{y}$	$\bar{Q}^{\circ}_{zx}$	$\bar{R}^{\circ}_{yz}$
0.0	0.501	0.501	0.102	0.501	0.399	0.000	0.000
0.2	0.533	0.410	0.105	0.466	0.365	0.764	0.278
0.4	0.556	0.244	0.099	0.380	0.293	0.912	0.455
0.5	0.546	0.180	0.096	0.334	0.257	0.843	0.501
0.6	0.526	0.133	0.092	0.290	0.224	0.747	0.526
0.8	0.472	0.074	0.082	0.217	0.171	0.556	0.527
1.0	0.415	0.044	0.073	0.161	0.133	0.409	0.490
1.2	0.364	0.027	0.064	0.119	0.105	0.304	0.437
1.4	0.318	0.018	0.056	0.088	0.085	0.230	0.380
1.5	0.298	0.014	0.053	0.076	0.076	0.201	0.352
1.6	0.279	0.012	0.049	0.066	0.069	0.177	0.325
1.8	0.245	0.008	0.043	0.049	0.057	0.138	0.276
2.0	0.216	0.006	0.038	0.037	0.048	0.110	0.233
2.5	0.161	0.002	0.028	0.020	0.033	0.065	0.154
3.0	0.122	0.001	0.021	0.011	0.024	0.041	0.104
4.0	0.076	0.000	0.013	0.004	0.014	0.019	0.052
5.0	0.051	0.000	0.008	0.001	0.009	0.010	0.029
10.0	0.013	0.000	0.002	0.000	0.002	0.001	0.004
15.0	0.006	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.001
20.0	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
50.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tableau 5.1.b. Contraintes normales et tangentielles sous le coin d'une fondation rectangulaire rigide ($\frac{L}{B} = 3$).
Charge centrée N.

Z/B	$\overline{p^c_z}$	$\overline{p^c_x}$	$\overline{p^{c'}_x}$	$\overline{p^c_y}$	$\overline{p^{c'}_y}$	$\overline{p^c_{xy}}$	$\overline{p^{c'}_{xy}}$	$\overline{p^c_{yz}}$	$\overline{p^c_{zx}}$
0.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0.2	0.652	0.275	0.166	0.276	0.234	0.160	0.159	0.295	0.299
0.4	0.428	0.160	0.095	0.175	0.159	0.089	0.076	0.178	0.180
0.5	0.373	0.130	0.079	0.151	0.138	0.074	0.058	0.154	0.154
0.6	0.333	0.106	0.068	0.133	0.123	0.063	0.045	0.137	0.134
0.8	0.278	0.072	0.053	0.107	0.099	0.047	0.029	0.113	0.104
1.0	0.240	0.050	0.044	0.088	0.081	0.036	0.020	0.097	0.083
1.2	0.210	0.035	0.037	0.073	0.068	0.028	0.014	0.084	0.066
1.4	0.186	0.025	0.033	0.061	0.057	0.022	0.010	0.074	0.053
1.5	0.175	0.021	0.031	0.056	0.053	0.019	0.009	0.069	0.048
1.6	0.166	0.018	0.029	0.051	0.049	0.017	0.007	0.065	0.043
1.8	0.149	0.013	0.026	0.043	0.042	0.014	0.006	0.057	0.036
2.0	0.134	0.010	0.023	0.037	0.037	0.011	0.004	0.051	0.030
2.5	0.106	0.005	0.018	0.024	0.026	0.007	0.002	0.038	0.019
3.0	0.086	0.003	0.015	0.016	0.020	0.004	0.001	0.029	0.013
4.0	0.059	0.001	0.010	0.008	0.012	0.002	0.000	0.017	0.007
5.0	0.042	0.000	0.007	0.004	0.008	0.001	0.000	0.010	0.004
10.0	0.013	0.000	0.002	0.000	0.002	0.000	0.000	0.001	0.000
15.0	0.006	0.000	0.001	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
20.0	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
50.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

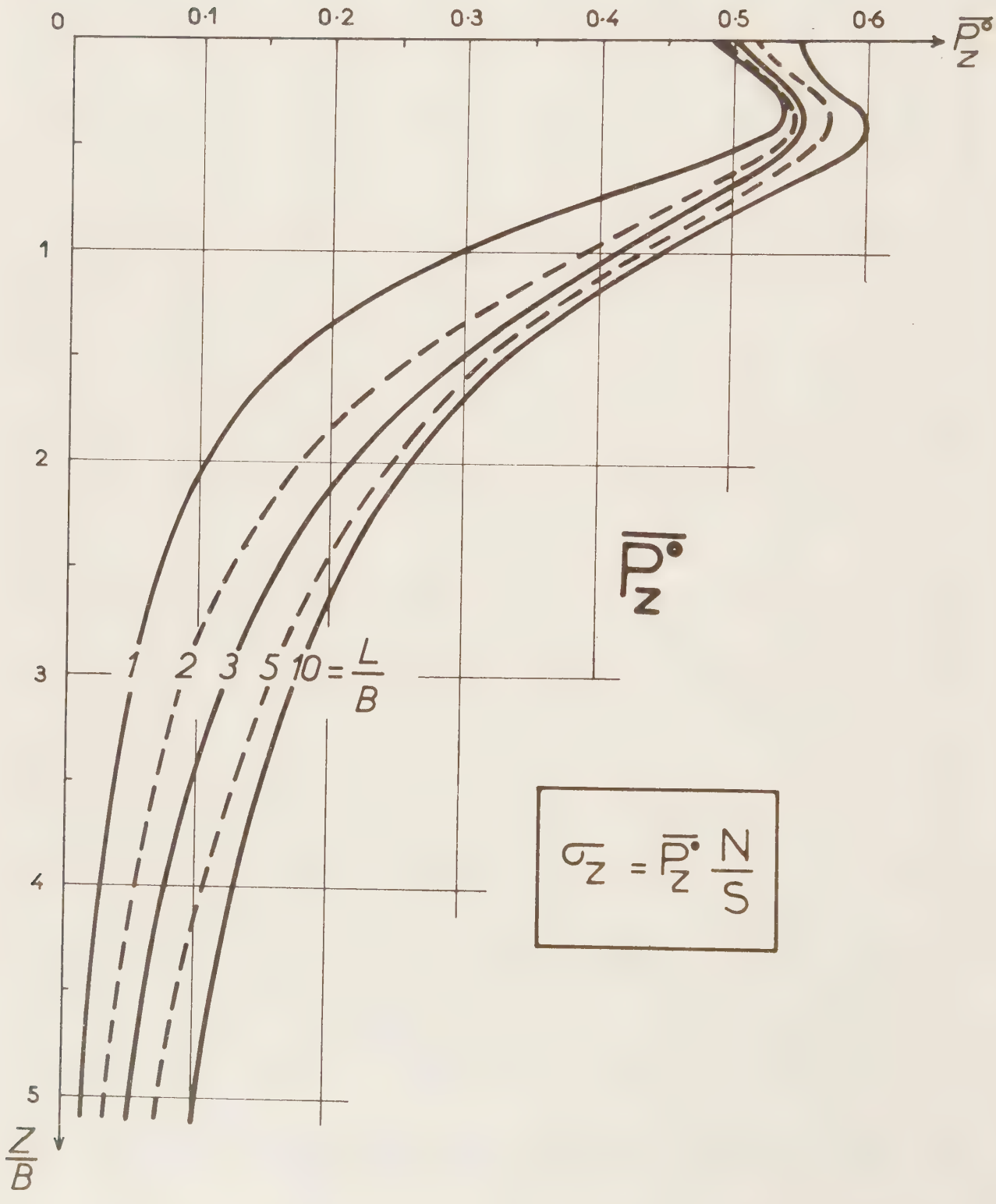
Tableau 5.1.c. Contraintes normales et tangentielles sous le coin d'une fondation rectangulaire rigide ($\frac{L}{B} = 3$).
Moment M_x.

Z/B	$\bar{R}_z^c$	$\bar{R}_x^c$	$\bar{R}_x^{c'}$	$\bar{R}_y^c$	$\bar{R}_y^{c'}$	$\bar{R}_{xy}^c$	$\bar{R}_{xy}^{c'}$	$\bar{R}_{yz}^c$	$\bar{R}_{zx}^c$
0.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0.2	2.908	1.182	1.067	0.888	0.592	0.576	0.426	1.161	1.291
0.4	1.789	0.641	0.610	0.388	0.328	0.264	0.147	0.594	0.739
0.5	1.510	0.500	0.494	0.273	0.266	0.199	0.096	0.468	0.610
0.6	1.307	0.395	0.410	0.192	0.221	0.153	0.063	0.378	0.514
0.8	1.019	0.250	0.294	0.088	0.158	0.093	0.028	0.254	0.374
1.0	0.818	0.161	0.219	0.028	0.116	0.056	0.012	0.172	0.276
1.2	0.665	0.105	0.167	-0.007	0.086	0.033	0.004	0.114	0.205
1.4	0.545	0.070	0.130	-0.027	0.065	0.019	0.000	0.073	0.153
1.5	0.494	0.057	0.115	-0.034	0.057	0.013	-0.000	0.057	0.133
1.6	0.449	0.047	0.102	-0.038	0.050	0.009	-0.001	0.043	0.116
1.8	0.372	0.032	0.081	-0.043	0.038	0.004	-0.002	0.021	0.088
2.0	0.309	0.022	0.065	-0.044	0.030	0.000	-0.002	0.006	0.067
2.5	0.199	0.010	0.039	-0.039	0.017	-0.002	-0.002	-0.014	0.036
3.0	0.131	0.004	0.024	-0.031	0.010	-0.003	-0.001	-0.021	0.020
4.0	0.061	0.001	0.010	-0.018	0.004	-0.002	-0.000	-0.020	0.007
5.0	0.031	0.000	0.005	-0.010	0.001	-0.001	-0.000	-0.015	0.003
10.0	0.002	0.000	0.000	-0.001	0.000	-0.000	-0.000	-0.003	0.000
15.0	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.001	0.000
20.0	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000
50.0	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000

Tableau 5.1.d. Contraintes normales et tangentielles sous le coin d'une fondation rectangulaire rigide ($\frac{L}{B} = 3$). Moment M_y.

Z/B	$\overline{Q_z^c}$	$\overline{Q_x^c}$	$\overline{Q_x^{c'}}$	$\overline{Q_y^c}$	$\overline{Q_y^{c'}}$	$\overline{Q_{xy}^c}$	$\overline{Q_{xy}^c}$	$\overline{Q_{yz}^c}$	$\overline{Q_{zx}^c}$
0.0									
0.2	1.951	0.265	0.154	0.762	0.838	0.264	0.034	0.862	0.640
0.4	1.058	-0.061	0.046	0.360	0.405	0.031	-0.057	0.426	0.174
0.5	0.827	-0.106	0.029	0.266	0.299	-0.007	-0.059	0.325	0.076
0.6	0.658	-0.122	0.020	0.202	0.226	-0.029	-0.055	0.254	0.014
0.8	0.432	-0.117	0.010	0.122	0.135	-0.046	-0.044	0.161	-0.050
1.0	0.293	-0.095	0.006	0.077	0.085	-0.047	-0.033	0.107	-0.072
1.2	0.204	-0.074	0.004	0.051	0.056	-0.042	-0.025	0.073	-0.075
1.4	0.145	-0.056	0.003	0.034	0.038	-0.036	-0.019	0.051	-0.071
1.5	0.124	-0.049	0.002	0.029	0.031	-0.033	-0.017	0.043	-0.067
1.6	0.106	-0.043	0.002	0.024	0.026	-0.030	-0.014	0.037	-0.064
1.8	0.079	-0.033	0.001	0.017	0.019	-0.025	-0.011	0.027	-0.056
2.0	0.060	-0.025	0.001	0.012	0.014	-0.021	-0.009	0.020	-0.049
2.5	0.033	-0.014	0.001	0.006	0.007	-0.013	-0.005	0.010	-0.035
3.0	0.019	-0.008	0.000	0.003	0.004	-0.009	-0.003	0.006	-0.025
4.0	0.008	-0.003	0.000	0.000	0.001	-0.004	-0.001	0.002	-0.013
5.0	0.003	-0.001	0.000	0.000	0.000	-0.002	-0.000	0.000	-0.008
10.0	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.001
15.0	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000
20.0	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000
50.0	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000

Figure 5.2. Contrainte σ_z sous le centre d'une fondation rectangulaire rigide (L x B).
Charge normale centrée N.



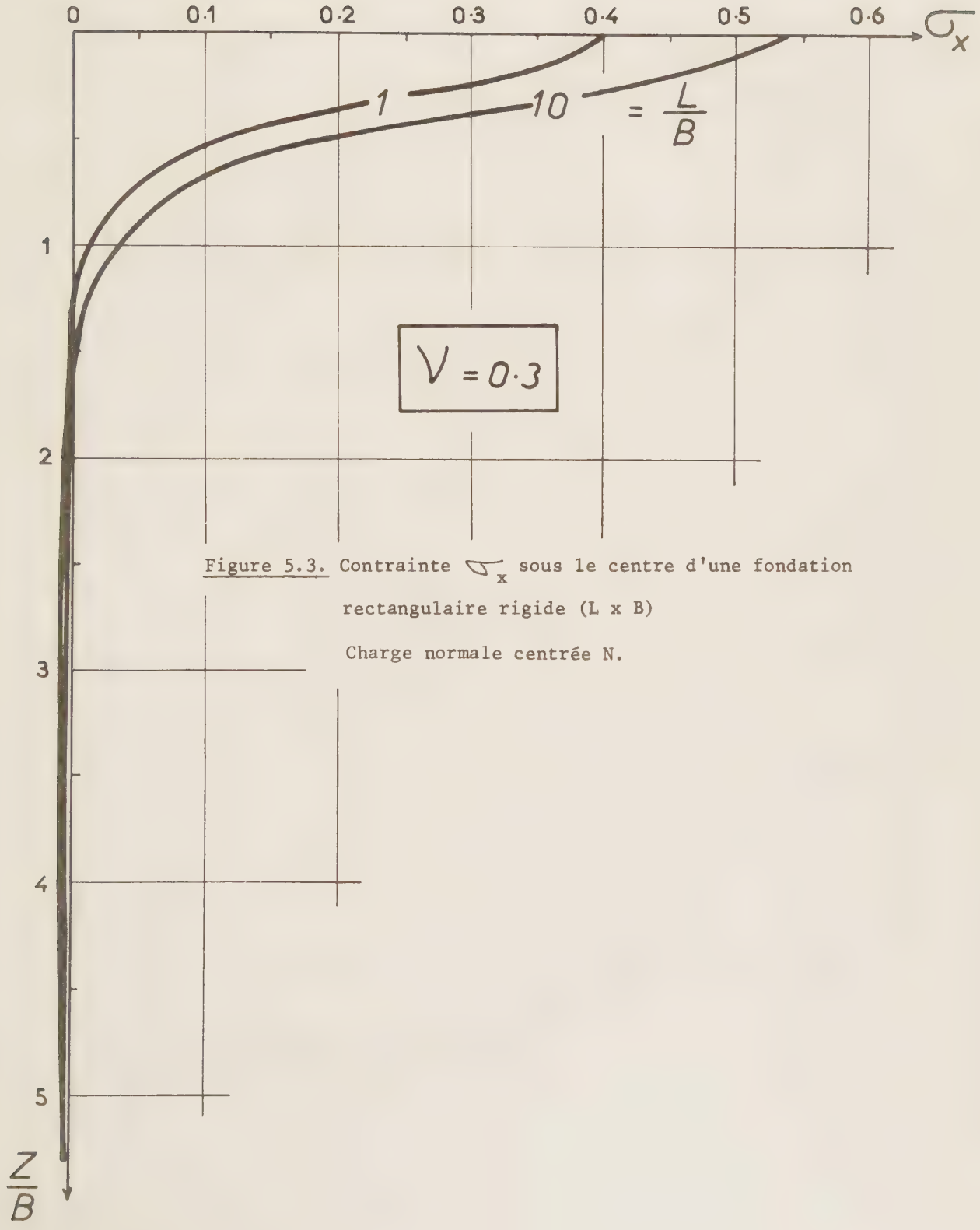


Figure 5.3. Contrainte σ_x sous le centre d'une fondation rectangulaire rigide (L x B)

Charge normale centrée N.

Contraintes sous le centre d'une fondation carrée rigide. Charge centrée N.

Comparaison des résultats obtenus par différentes auteurs.

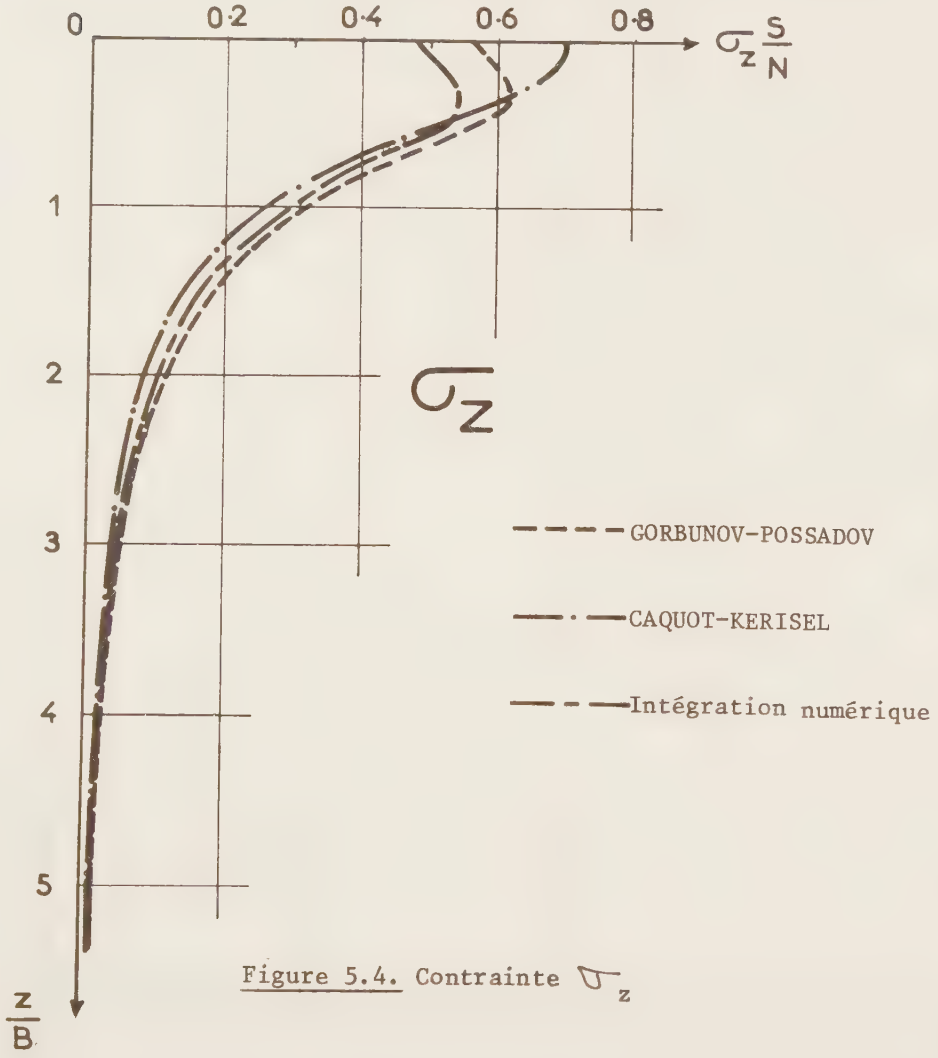


Figure 5.4. Contrainte σ_z

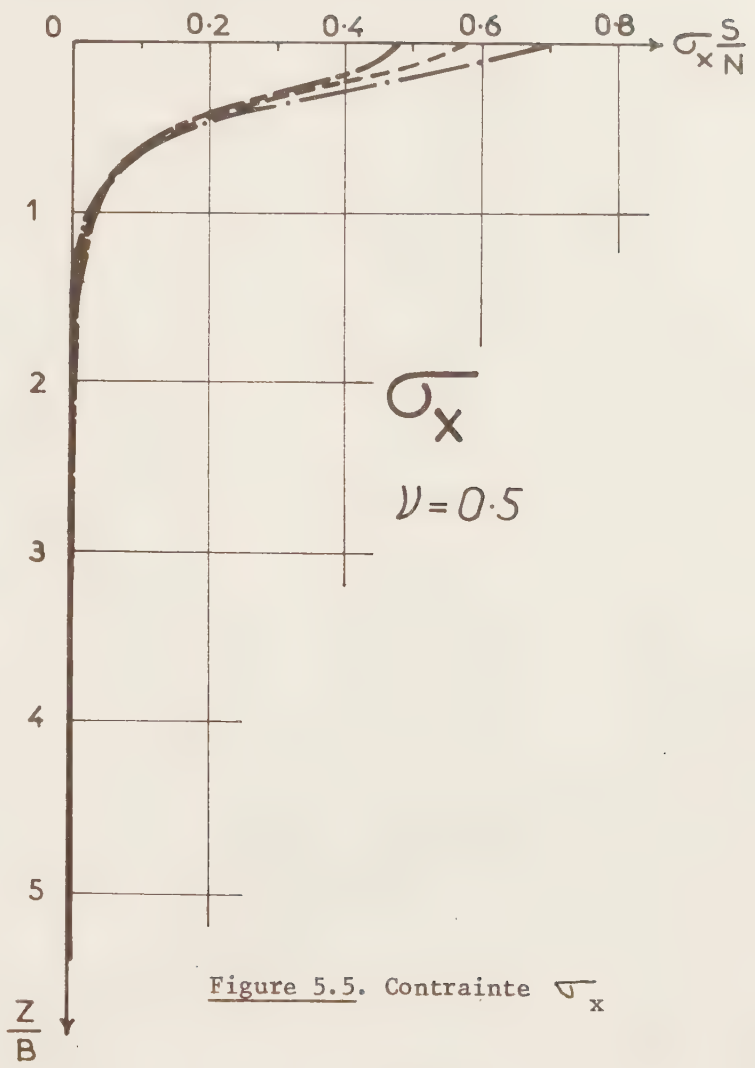
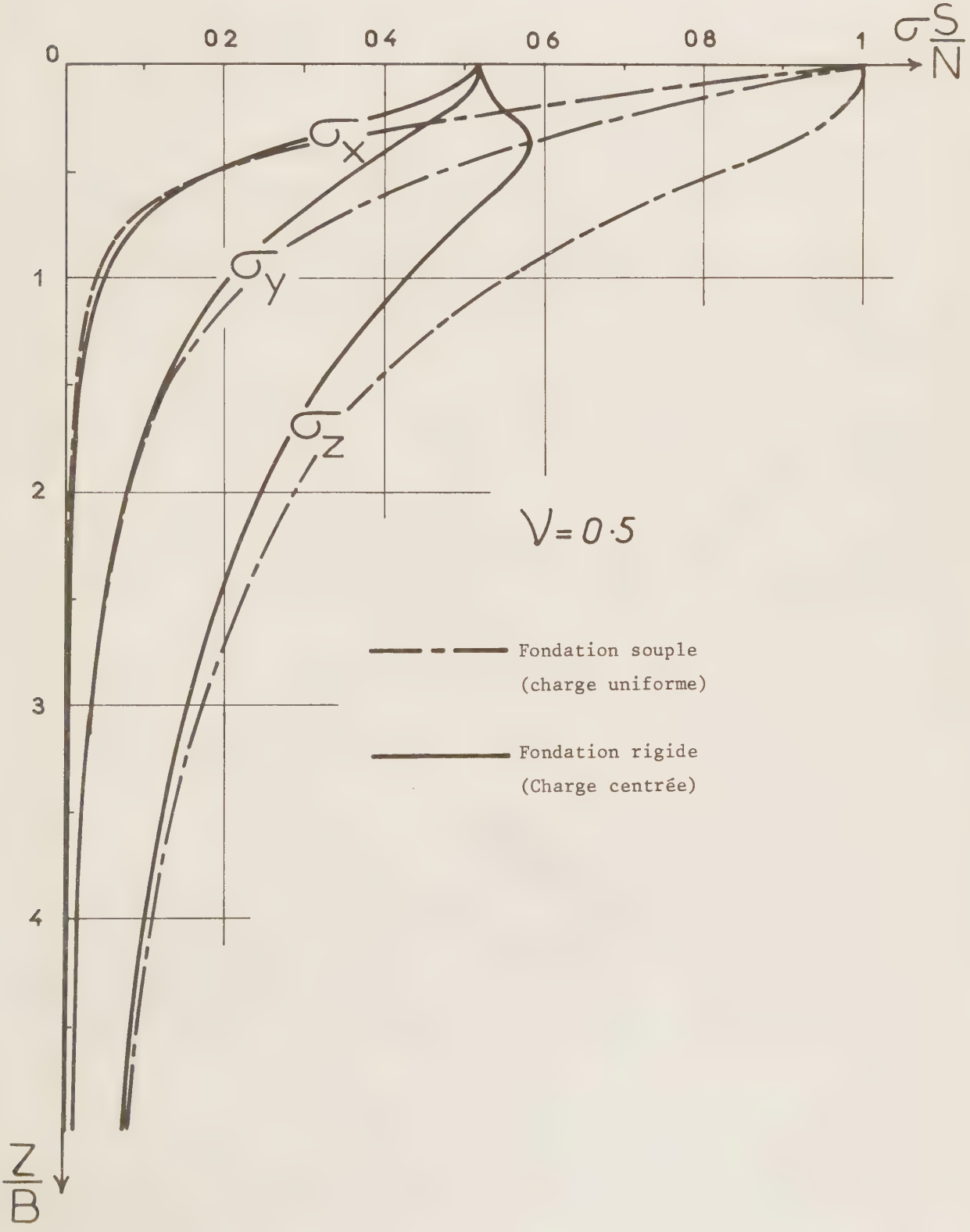


Figure 5.5. Contrainte σ_x

Figure 5.6. Contraintes sous le centre d'une fondation rectangulaire $\frac{L}{B} = 5$.
Charge normale centrée.
Comparaison Rigide-Souple.



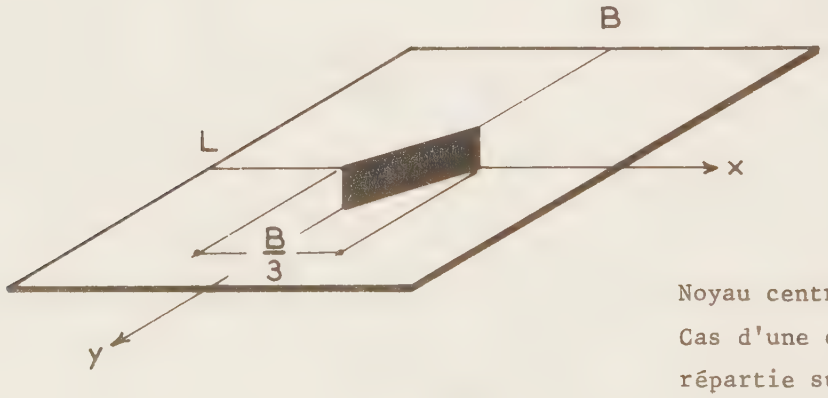
6. - NOYAU CENTRAL

6.1. Définition. Cas de la charge linéairement répartie

Nous avons adopté pour le noyau central la définition de la Résistance des Matériaux: Lorsque le point d'application de la résultante des charges appliquées reste à l'intérieur du noyau central, il n'apparaît pas de contraintes de traction sous la fondation.

Cette notion est extrêmement intéressante en mécanique des sols puisqu'en aucun cas des contraintes de traction ne peuvent se développer entre le massif et la fondation.

Lorsque la charge est linéairement répartie sur un rectangle, le noyau central est un losange ; ses limites $\pm \frac{B}{6}$ et $\pm \frac{L}{6}$ suivant les axes ox et oy justifient le nom de "tiers central" (figure ci-dessous).



Noyau central.
Cas d'une charge linéairement répartie sur un rectangle.

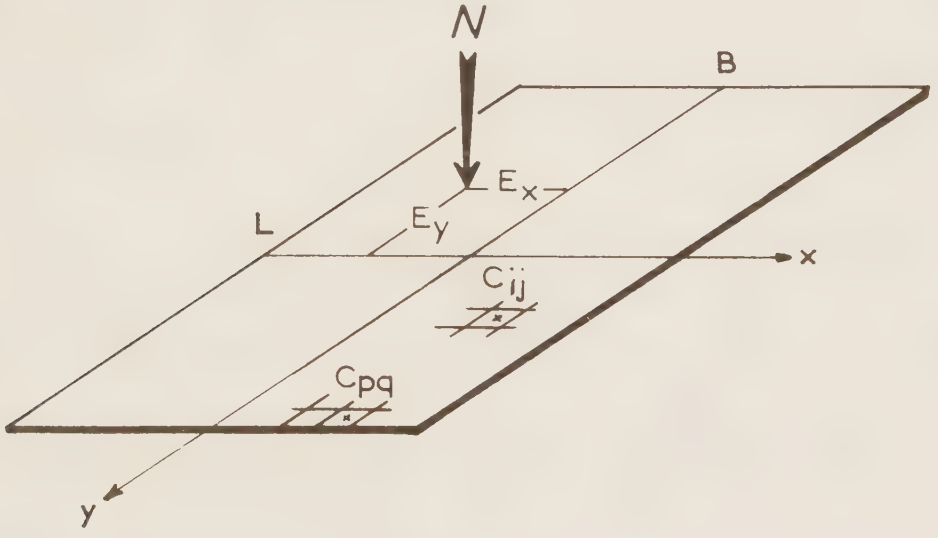
Nous avons cherché à savoir quelle forme prenait le noyau central pour une fondation rigide.

6.2. Méthode de calcul

Nous avons effectué un calcul numérique dont le principe est le suivant :

Pour une excentricité E_y (i.e. un rapport $\frac{M_x}{N}$) donnée, on fait croître E_x, c'est-à-dire $\frac{M_y}{N}$, par pas très faible, en testant en chaque point C_{ij} le signe de la réaction résultante sous le système (N, M_x, M_y).

On arrête le processus lorsqu'une contrainte négative ou nulle apparaît en l'un des points que nous appelerons C_{pq}. Nous avons pu vérifier que ce point était toujours près du bord de la fondation, c'est-à-dire $p = n$ ou (et) $q = m$.



Mais la valeur finale de l'excentricité E_x ainsi trouvée est un peu forte puisque la contrainte n'est pas nulle exactement sous le bord, mais en C_{pq} et, par suite, en toute une zone située près du bord. Cette première étape est cependant indispensable puisqu'elle permet de savoir à peu près en quel endroit apparaîtra la traction (pour une excentricité E_y donnée) lorsque E_x croît.

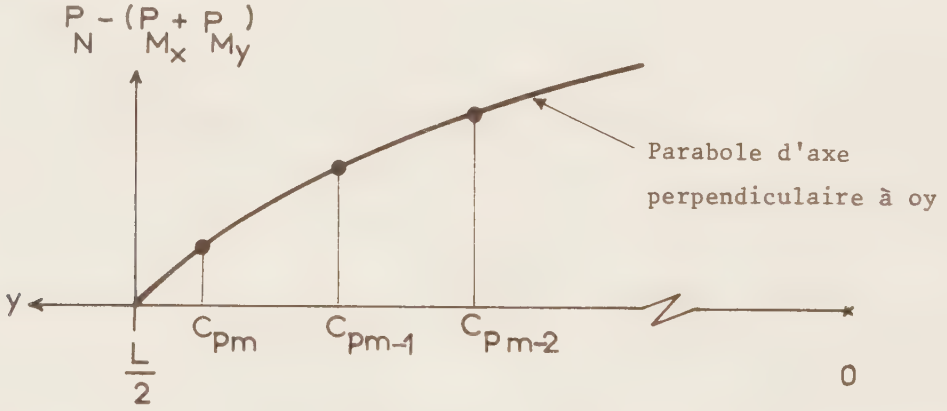
Supposons alors que ce point C_{pq} soit près du petit côté de la fondation alors q = m. La valeur de E_x trouvée ci-dessus conduit à la courbe de répartition A de la figure 6.1.

Il fallait donc chercher E_x telle que la contrainte résultante soit nulle exactement sous le bord de la fondation, c'est-à-dire telle que la répartition soit celle de la courbe B (fig. 6.1.).

Nous avons fait cette étude successivement avec deux hypothèses.

Soient, en effet, $p_N(x, y)$ la contrainte de compression provoquée en (x, y, o) par la charge centrée N, et P_{M_x} (x, y) et P_{M_y} (x, y) les contraintes de traction sous M_x et M_y. Le problème posé était, pour M_x et N donnés (i.e. E_y) de déterminer M_y (i.e. E_x) de façon que la contrainte résultante $P_N - (P_{M_x} + P_{M_y})$ s'annule pour $y = \frac{L}{2}$. Nous avons donc fait un premier calcul en supposant que la quantité précédente variait, avec y, en suivant une <u>parabole</u> d'axe vertical construite sur les contraintes résultantes agissant en C_{pm}, C_{pm-1} et C_{pm-2}.

Contrainte résultante (N, M_x, M_y).



Cependant, si nous examinons le cas connu de la bande infinie quand la résultante est sur la frontière du noyau central c'est-à-dire pour $E_x = \pm \frac{B}{4}$ (GIROUD [15]), nous pouvons faire 2 constatations (figure 6.2.).

- La différence $P_N - P_M$ ne suit pas une parabole ; elle a en effet pour expression :

$$P_N - P_M = \frac{N}{B} \cdot \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{B/2 - x}{B/2 + x}}$$

Courbes de répartition des réactions dans un plan x = cste pour une charge normale excentrée.

(A) La résultante passe à l'intérieur du noyau central.
(B) La résultante passe par la frontière du noyau central.

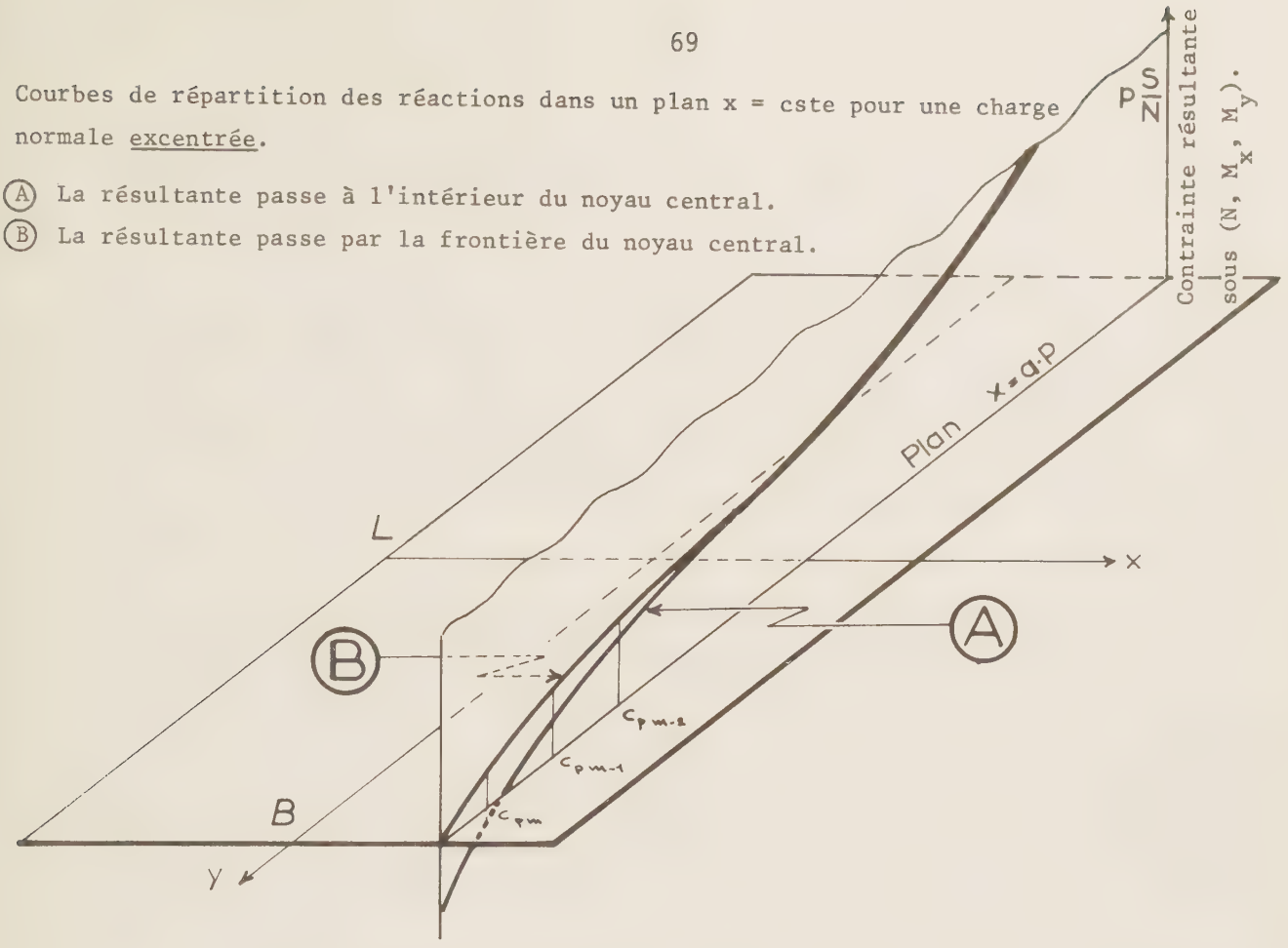


Figure 6.1. Illustration de la méthode de calcul du noyau central (§ 6.2.).

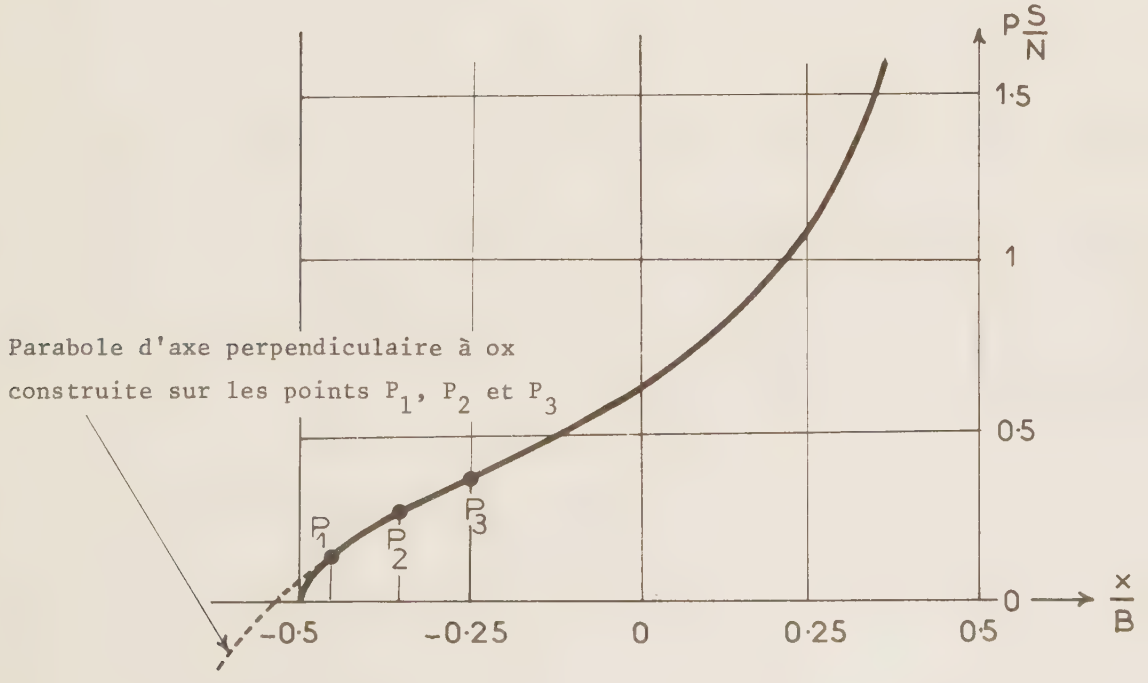


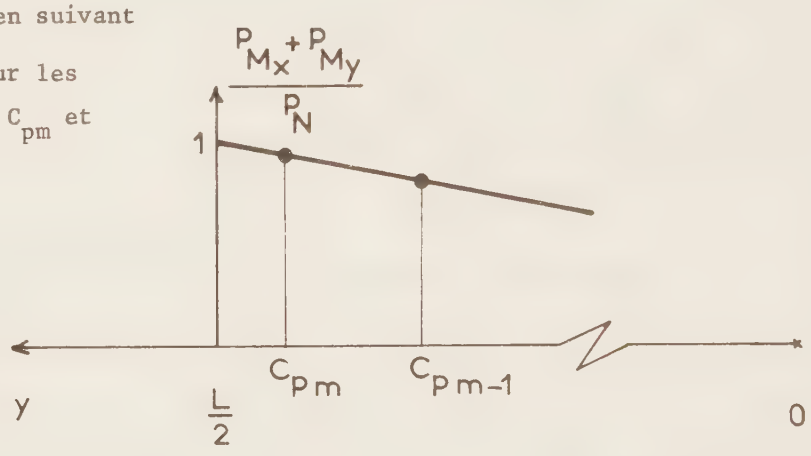
Figure 6.2. Bande infinie rigide. Répartition des réactions lorsque la résultante N passe par la frontière du noyau central ($E_x = \pm \frac{B}{4}$).

Au voisinage de x = B/2, elle décroît en particulier plus vite vers 0 que ne le ferait la parabole définie précédemment.

- Le rapport $\frac{P_M}{P_N}$ a par contre une forme simple.

$\frac{P_M(x)}{P_N(x)} = \frac{x}{B/2}$ Il tend évidemment vers 1 quand x tend vers $\frac{B}{2}$.

Par analogie avec la bande infinie, nous avons fait un second calcul pour déterminer E_x, de telle sorte que le rapport $\frac{P_{M_x} + P_{M_y}}{P_N}$ tende vers 1 (quand y tend vers $\frac{L}{2}$), en suivant une droite construite sur les contraintes agissant en C_{pm} et C_{pm-1}.



Notons que si la première étape indique que la traction apparaîtra sur le petit côté de la fondation, en un point voisin de C_{pm}, elle ne prouve pas que ce point ait même abscisse x que C_{pm} comme le supposent les deux calculs précédents. Nous avons donc fait ces calculs non seulement pour C_{pm} mais aussi pour C_{p-1m} et C_{p+1m} et nous avons retenu la plus petite des trois valeurs de l'excentricité E_x ainsi obtenues.

N.B. Le principe du calcul est le même quand C_{pq} se trouve près du grand côté (q = n) ou près du coin (p = m et q = n).

6.3. Résultats

Les deux hypothèses ($p_N - p_M$ décrit une parabole et $\frac{p_M}{p_N}$ décrit une droite) conduisent à des noyaux très voisins. Ceux obtenus par le premier calcul sont cependant légèrement plus grands, ce qui s'explique puisque comme nous l'avons signalé lors de l'étude de la bande infinie (§ 6.2.), la parabole que suit $p_N - p_M$ dans le calcul tend moins vite vers 0 que la courbe réelle (quand $y \longrightarrow \frac{L}{2}$) et permet par conséquent des excentricités plus grandes avant apparition des tractions.

Nous pensons que le second calcul, qui respecte l'analogie avec la bande infinie est plus satisfaisant et ce sont ses résultats que nous présentons sur les figures 6.3. à 6.6.

On remarque en premier lieu que le noyau central a une forme curviligne et que pour toutes les valeurs de α étudiées (de 1 à 10), il est plus grand que le tiers central de répartition linéaire. L'utilisation du tiers central pour les fondations rigides dont le rapport $\frac{L}{B}$ est inférieur à 10, est donc dans le sens de la sécurité.

Nous avons rassemblé sur une même courbe (figure 6.7.) les variations en fonction du rapport des côtés, des limites du noyau central suivant les axes.

Cette courbe montre que la limite du noyau central suivant le petit axe tend lentement, lorsque α croît, vers la valeur 0.250 correspondant à la bande infinie. Ce phénomène n'a rien de surprenant si on se rappelle l'étude comparative des cas $\alpha = 10$ et α infini (§ 4.3.2.). Nous avions vu, en effet :

- que les réactions le long du petit axe ox, produites par une charge centrée N étaient plus faibles d'environ 13 % pour la fondation $\alpha = 10$ que pour la bande.
- qu'au contraire, les réactions dues à un moment M_y (qui correspond à une excentricité de N suivant ox) étaient pratiquement égales pour les deux fondations.

On comprend très bien alors que la limite du noyau central suivant le petit axe soit sensiblement plus faible pour $\alpha = 10$ que pour α infini, car la traction y apparaîtra plus tôt ; d'où les valeurs 0.221 obtenues pour $\alpha = 10$ et 0.250 pour α infini, soit un écart d'environ 12 %.

Nous avons enfin porté sur un même graphique (figure 6.8.) les résultats de GORBUNOV-POSSADOV et les notres. Comme on pouvait s'y attendre puisque les répartitions de contraintes obtenues par GORBUNOV-POSSADOV sont, près des bords, très éloignées de la réalité, les limites qu'il propose pour le noyau central ne semblent pas satisfaisantes. En particulier e_x (pour $e_y = 0$) décroît de 0.213 à 0.112 quand α passe de 1 à 10 alors qu'il doit tendre vers 0.250 quand α tend vers l'infini. Notons que nous avons obtenu la même valeur 0.213 pour $\alpha = 1$, mais ceci ne semble être qu'un effet du hasard.

Fondation rectangulaire rigide (L x B)

Noyau central.

e_x	e_y
0.213	0.000
0.212	0.018
0.209	0.027
0.207	0.036
0.200	0.045
0.198	0.054
0.190	0.063
0.182	0.072
0.179	0.081
0.170	0.090
0.164	0.099
0.158	0.108
0.148	0.117
0.139	0.126
0.130	0.135
0.121	0.144
0.112	0.153
0.101	0.162
0.087	0.172
0.074	0.181
0.061	0.190
0.028	0.208
0.000	0.213

$\frac{L}{B} = 1$

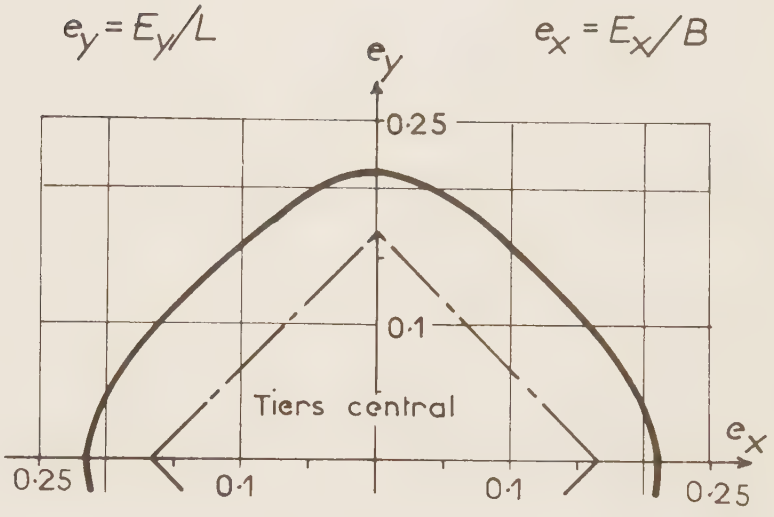


Figure 6.3.

e_x	e_y
0.216	0.000
0.215	0.012
0.214	0.024
0.209	0.036
0.202	0.048
0.199	0.060
0.185	0.072
0.175	0.084
0.165	0.096
0.153	0.108
0.142	0.120
0.131	0.132
0.120	0.145
0.102	0.157
0.087	0.169
0.069	0.181
0.046	0.193
0.020	0.205
0.000	0.209

$\frac{L}{B} = 2$

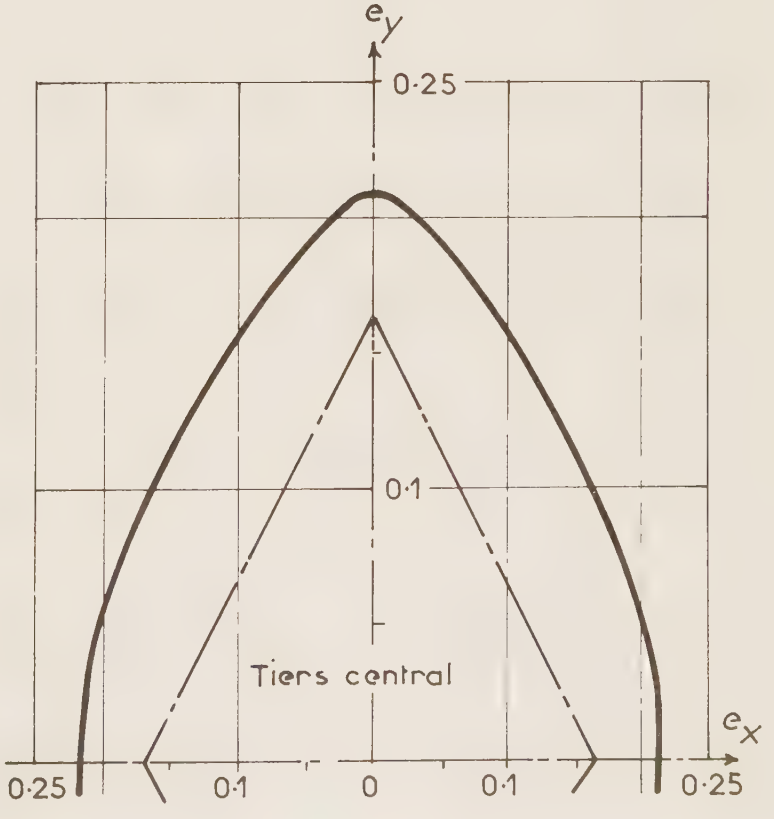
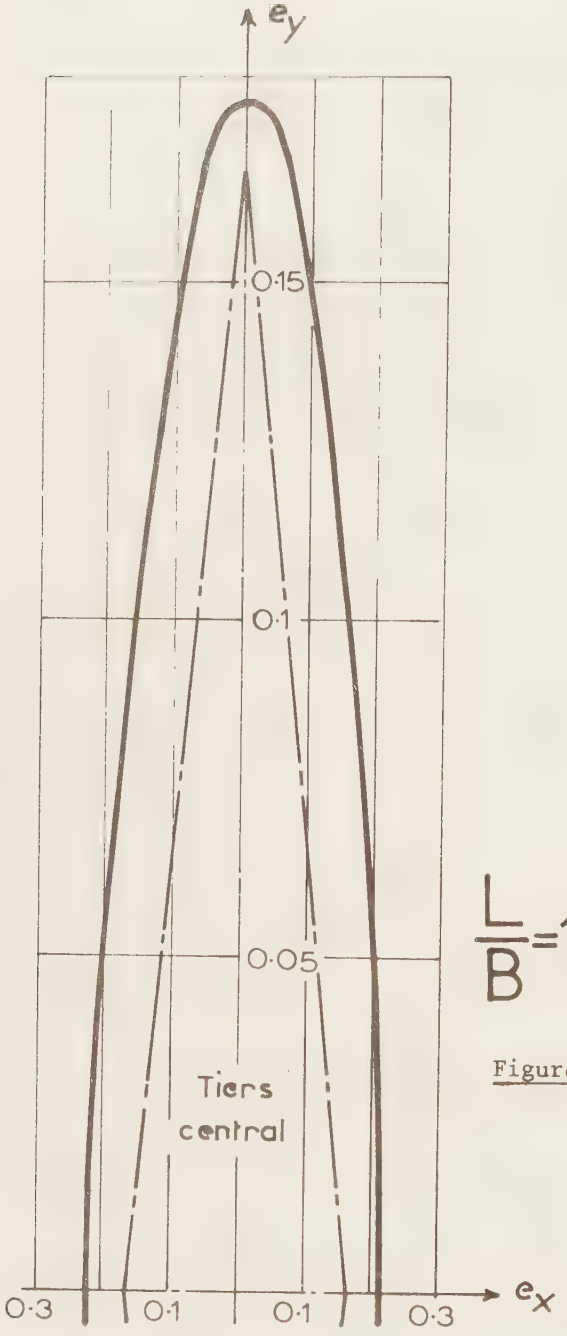


Figure 6.4.

Fondation rectangulaire rigide (L x B)

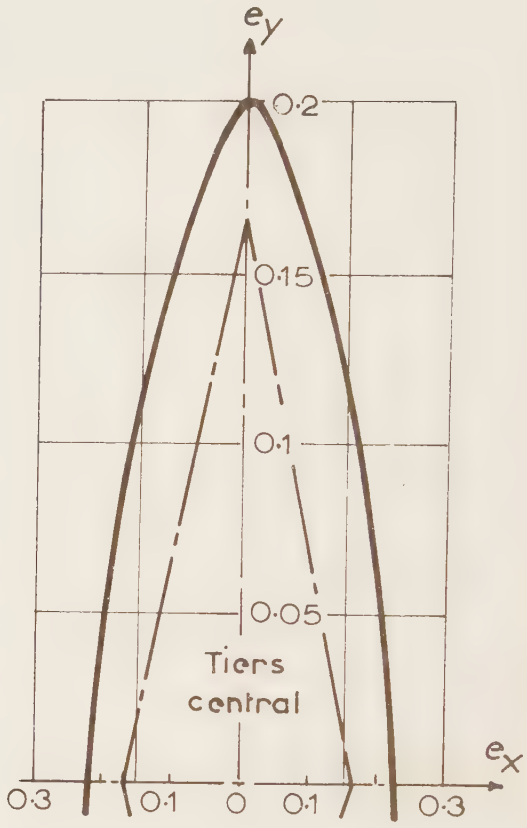
Noyau central.



$\frac{L}{B}=10$

Figure 6.5.

e_x	e_y
0.221	0.000
0.220	0.016
0.213	0.033
0.203	0.049
0.190	0.066
0.174	0.082
0.157	0.099
0.139	0.115
0.117	0.132
0.090	0.148
0.071	0.165
0.000	0.176



$\frac{L}{B}=5$

Figure 6.6.

e_x	e_y
0.219	0.000
0.218	0.015
0.215	0.030
0.208	0.046
0.195	0.061
0.182	0.077
0.169	0.092
0.155	0.108
0.134	0.123
0.114	0.139
0.096	0.154
0.074	0.170
0.047	0.185
0.001	0.201
0.000	0.200

Figure 6.7. Limite du noyau central suivant l'axe parallèle au côté a en fonction du rapport $\frac{b}{a}$ des côtés du rectangle rigide.

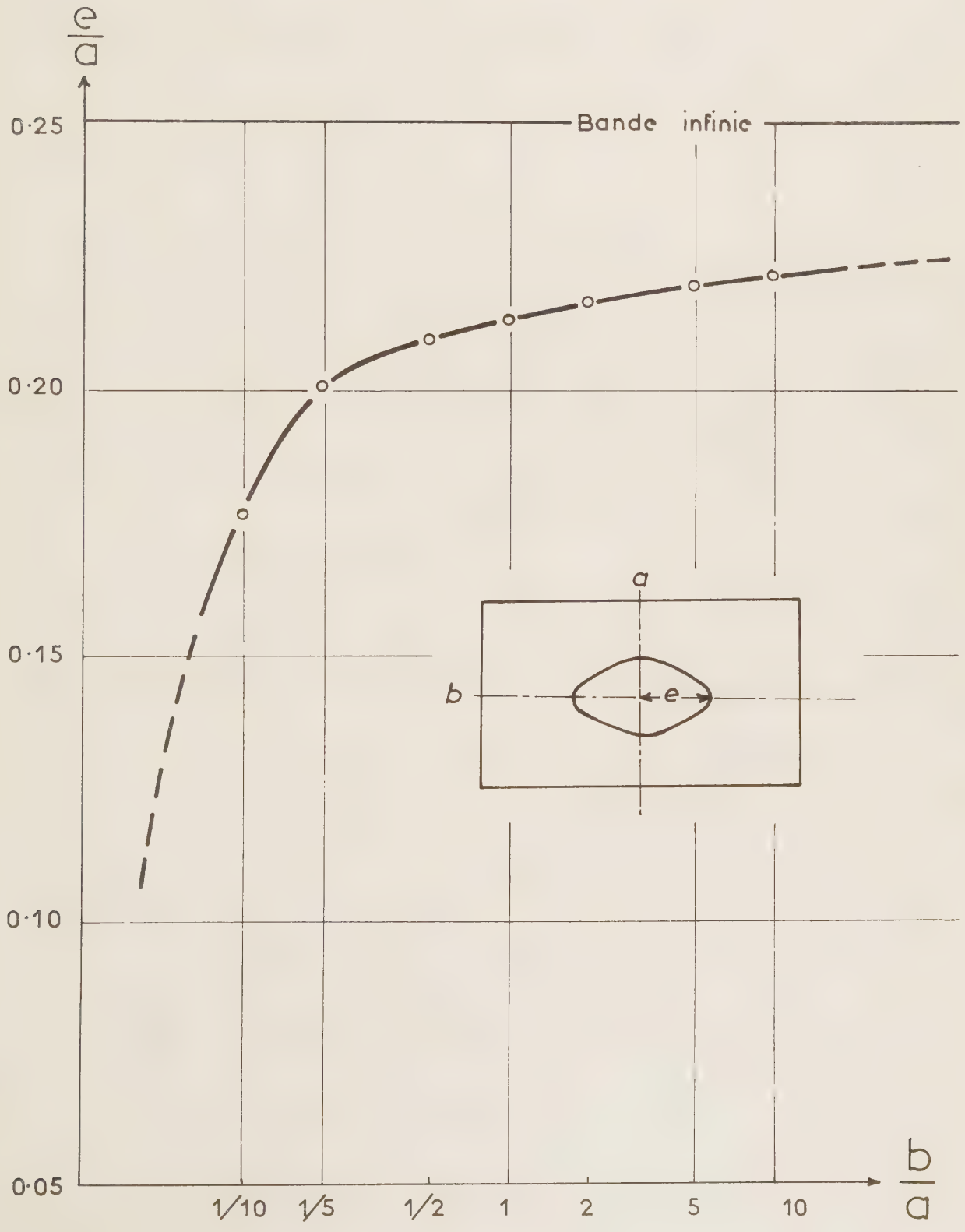
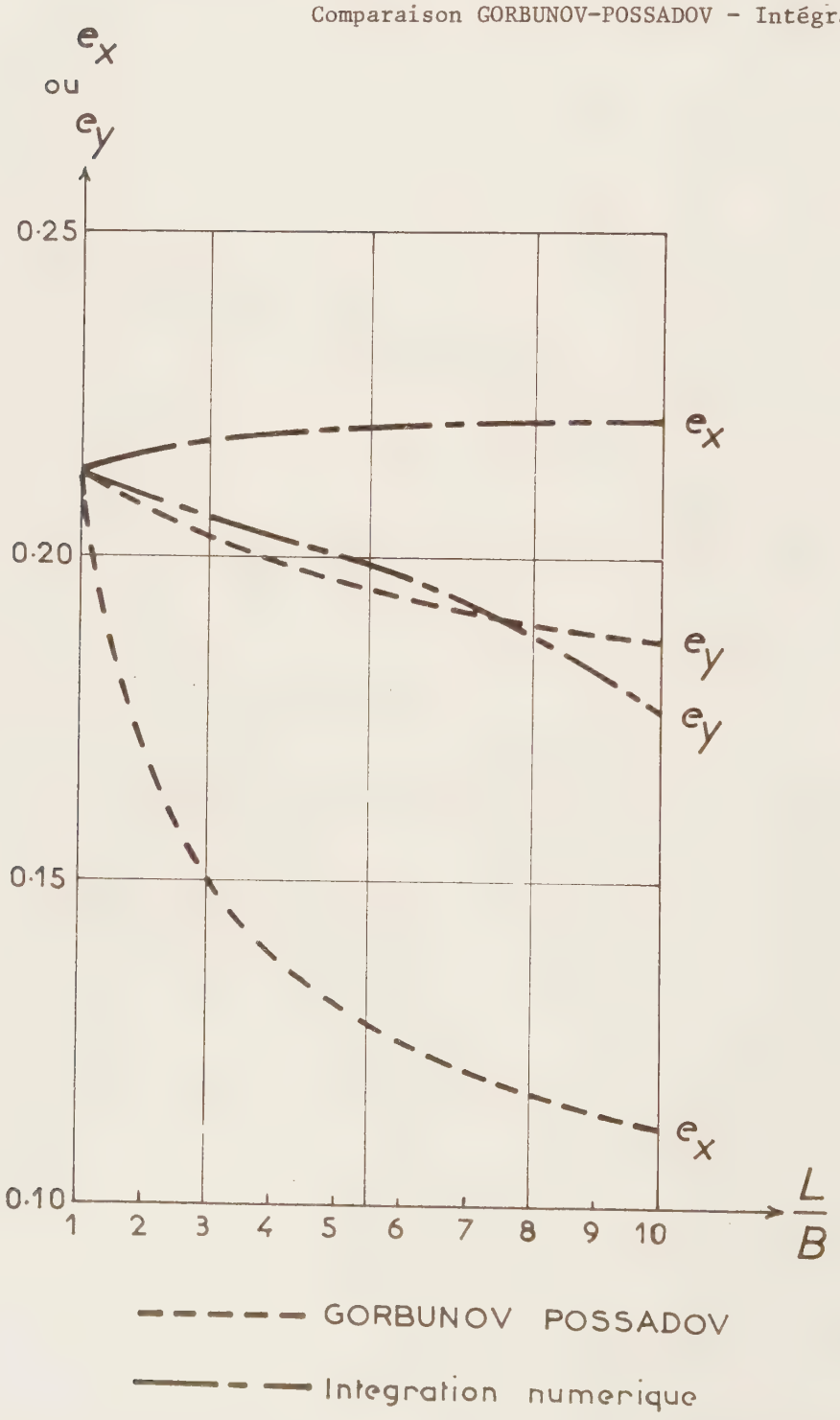


Figure 6.8. Limites du noyau central suivant les axes ox et oy.
Comparaison GORBUNOV-POSSADOV - Intégration numérique.



7. - EXCENTRICITE OPTIMALE

7.1. Définition

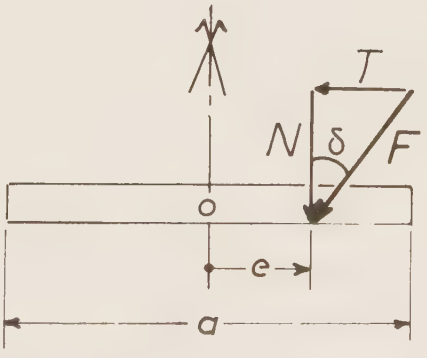
Nous avons supposé, dans ce dernier paragraphe que la résultante de la charge était excentrée et inclinée, mais de telle sorte qu'elle reste dans un plan vertical passant par l'un des axes de la fondation (alors rugueuse). Sous l'action d'une telle charge, elle subit en général une translation et une rotation.

Nous appellons excentricité optimale pour une inclinaison donnée, celle qui n'entraîne pas de rotation de la fondation.

7.2. Expression

Le côté parallèle au plan vertical contenant la résultante des charges sera noté a ; l'autre côté sera b.

L'inclinaison sera δ , l'excentricité e, comptée à partir du centre de la fondation. Elle sera positive si elle est opposée à T, composante horizontale de la résultante F.



On prend pour rotation de la fondation rigide la rotation moyenne de la fondation souple définie par VOGT [29] (GIROUD [15]) :

$$tg\,\varphi_m = -\frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{1}{ab}\left[6(1-\nu)Q_\varphi N\frac{e}{a} + (1-2\nu)S_\varphi T\right]$$

Q_y et S_y sont des coefficients fonctions de $\frac{b}{a}$ (GIROUD [15]).

La rotation est nulle si :

$$\frac{e}{a} = -\frac{1}{6}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\frac{S_\varphi}{Q_\varphi}\,tg\,\delta$$

D'où, en posant

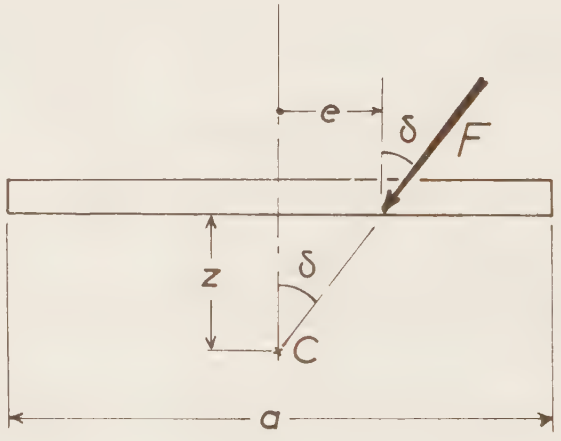
$$Z = a\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{1-2\nu}{1-\nu}\cdot\frac{S_\varphi}{Q_\varphi}\right)$$

$$\boxed{\frac{e}{a} = \frac{Z}{a}\,tg\,\delta}$$

7.3. Résultats

$\frac{Z}{a}$ est une fonction de ν et $\frac{b}{a}$; nous donnons ses valeurs dans le tableau 7.1. Elles permettent, connaissant l'inclinaison, de trouver l'excentricité conduisant à une rotation nulle, et réciproquement.

Mais tg δ vaut $\frac{e}{Z}$; Z représente donc la cote du point où à l'excentricité optimale la résultante coupe l'axe vertical passant par le centre de la fondation. Nous avons ainsi pu construire les courbes de la figure 7.2. qui permettent de trouver facilement la position de ce point C pour des valeurs quelconques de ν et $\frac{b}{a}$. Notons que pour une fondation ($\frac{b}{a}$) et un massif (ν) donnés, C est fixe.



Toute résultante passant alors par ce point C sera à l'excentricité optimale.

Les résultats concernant le noyau central et l'excentricité optimale font, en collaboration avec GIROUD, l'objet d'une communication au Congrès de Mécanique des Sols de MOSCOU (Août 1973).

Tableau 7.1.

$\frac{b}{a}$	$\nu = 0$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.3$	$\nu = \frac{1}{3}$	$\nu = 0.4$	$\nu = 0.5$
0.01	0.052	0.047	0.039	0.030	0.026	0.017	0.000
0.05	0.081	0.072	0.061	0.046	0.040	0.027	0.000
0.10	0.099	0.088	0.074	0.057	0.049	0.033	0.000
0.20	0.125	0.112	0.094	0.071	0.062	0.041	0.000
0.30	0.144	0.128	0.108	0.082	0.072	0.048	0.000
0.40	0.161	0.141	0.119	0.090	0.079	0.052	0.000
0.50	0.170	0.152	0.128	0.097	0.085	0.056	0.000
0.60	0.181	0.161	0.136	0.103	0.090	0.060	0.000
0.70	0.190	0.169	0.143	0.109	0.095	0.063	0.000
0.80	0.198	0.176	0.148	0.113	0.099	0.066	0.000
0.90	0.205	0.183	0.154	0.117	0.102	0.068	0.000
1.00	0.212	0.188	0.159	0.121	0.106	0.070	0.000
1.50	0.235	0.209	0.176	0.134	0.117	0.078	0.000
2.00	0.251	0.223	0.188	0.143	0.125	0.083	0.000
3.00	0.272	0.241	0.204	0.155	0.136	0.090	0.000
4.00	0.284	0.252	0.213	0.162	0.142	0.094	0.000
5.00	0.292	0.260	0.219	0.167	0.146	0.097	0.000
10.00	0.314	0.279	0.235	0.179	0.157	0.104	0.000
20.00	0.328	0.291	0.246	0.187	0.164	0.109	0.000
∞	0.349	0.310	0.262	0.199	0.174	0.116	0.000

Valeurs de $\frac{Z}{a/2}$

Relation entre l'inclinaison de la charge et l'excentricité optimale.

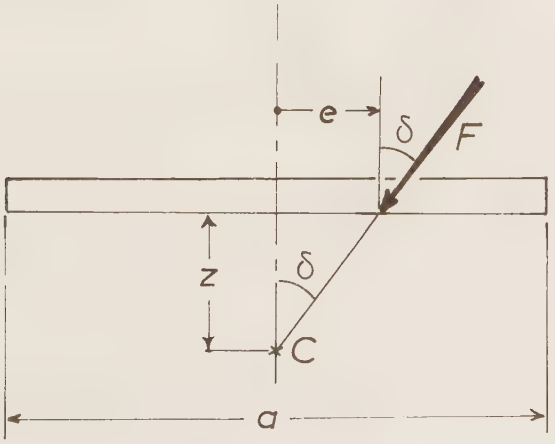
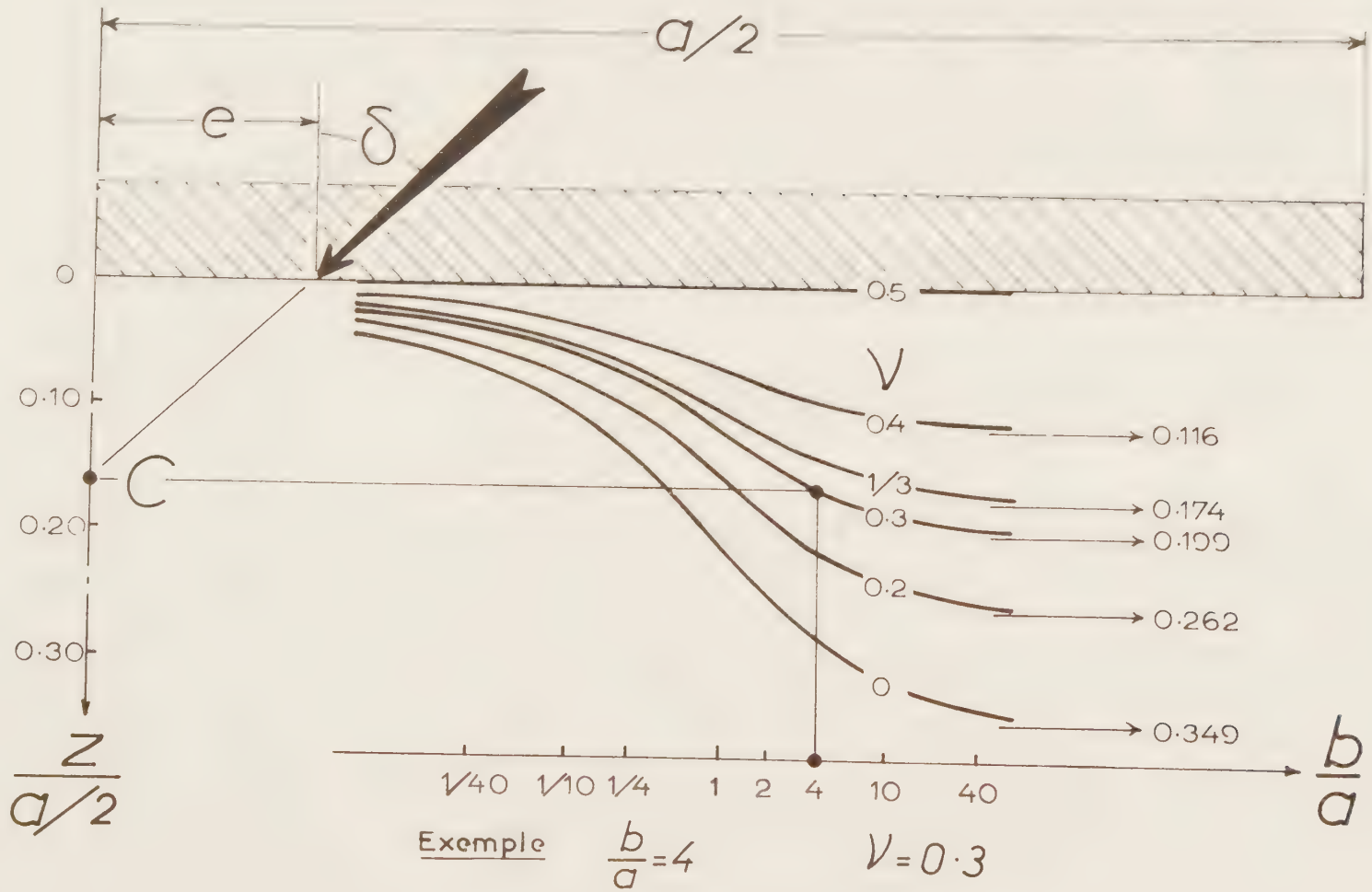


Figure 7.2. Construction graphique des résultantes à Excentricité Optimale. (rotation nulle de la fondation).



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Première Partie

1 ABAMOV V.M. "The problem of the contact of an elastic half plane with an absolutely rigid base for the determination of the frictional force".
Doklady Akad. Sciences U.R.S.S. 17, 4 (1937), p 173-178.

2 ABSI E. "Etude de problèmes particuliers".
A.I.T.B.T.P. Janvier 1970, n° 265. Série 121, p 180-182.

3 BACHELIER M. "Etude Géotechnique des fondations de la centrale d'Ivry".
Travaux, 36, (1952), p 350.

4 BOUSSINESQ J. "Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques".
Gauthier-Villars, Paris, 1885.

5 CAQUOT et KERISEL J. "Traité de Mécanique des Sols".
4e édition. Gauthier-Villars, Paris, (1966).

6 CARRILLO N. "Influence of the rigidity of a rectangular slab on the settlements and on the distribution of elastic soil reactions".
Proc. 2 nd. Int. Conf. S.M. Rotterdam (1948), V.7, p 28-30.

7 CERRUTI V. "Ricerche intorno all' equilibrio dei corpi elastici isotropi".
Reale Accademia dei Lincei, 13, Roma, 1882.

8 DE BEER E.E. "Le calcul des poutres et plaques appuyées sur le sol". Ann. Trav. Publ. Belg. 2, 3. Bruxelles, (1956).

9 FLORIN V.A. "Eléments de mécanique des sols". Edition d'état pour les publications de Génie Civil. Moscou, 1959.

10 FROELICH O.K. "Über eine einfache Anwendung de Potential theorie auf die Berechnung der Schiefstellung Von Bauwerken". Anzeiger der math. natur. Klasse der Osterreich Akademie der Wissenschaften 7, Wien, 1952.

11 GIROUD J.P. "Tassement d'une aire rectangulaire linéairement chargée". Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division. A.S.C.E., July, 1968.

12 GIROUD J.P. "Thèse Doctorat d'Etat, Grenoble. A paraître.

13 GIROUD J.P. "Déplacements provoqués par une force concentrée exercée à la surface du sol". Le Génie Civil. T. 146. N° 12. Décembre 1969.

14 GIROUD J.P. "Contraintes provoquées par une force concentrée exercée à la surface du sol". Le Génie Civil. T. 146. N° 12. Décembre 1968.

15 GIROUD J.P. "Tables pour le calcul des fondations". Dunod Paris T. 1 1972
T. 2 1973

16 GIROUD J.P. "Commentaires sur l'utilisation de l'élasticité pour les projets de fondations". IV COBRAMSEF V.I T.II Guanabara Agosto 1970. p. V.1 à V.5.

17 GORBUNOV-POSSADOV M.I. "Calcul des constructions sur assise élastique". Edition du Génie Civil et Architecture. Varsovie, 1956.

18 KERISEL J. et QUATRE M. "Tassements sous les fondations" Annales des Ponts et Chaussées. 1966. III.

19 LAZEBNIK G.E. et SMIRNOV A.A. "Measurement of stresses under a rigid foundation block in the field".
Osnovaniya Fundamenty i Mekhanika Gruntov. N° 2. Mars-Avril 1965. p 1-6.

20 LEE I.K. "Elastic Settlements of footings with rough interfaces".
Fourth Australia New-Zealand Conference on Soil Mechanics Adelaïde 1963. p 225-232.

21 LEUSSINK H. et SCHWEICKERT K. "Versuche Über Setzungsverhalten und Sohldruckverteilung am Übergan vom elastichen zum plastischen Zustand einer sehr dicht gelagerten Sandunterlage bei Belastung durch ein starres Eundament".
Congrès Européen de Mécanique des sols. Wiesbaden, (1963). p 279-284.

22 MURZENKO Y.M. "Experimental results on the distribution of normal contact pressure on the base of a rigid foundation resting on Sand".
Osnovaniya Fundamenty i Mekhanika Gruntov. N° 2, Mars-Avril 1965. p 1-4.

23 MUSKHELISHVILI N.I. "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity".
Noordhoff. Groningen. 1953.

24 SCHEUH G. "Contribution à l'étude des argiles non saturées".
Thèse Ingénieur-Docteur. Grenoble (1959).

25 SCHIFFMAN R.L. "The influence of Adhesion on the stresses and displacements in an Elastic Half Space".
Highway Research Record N° 282. 1969. p 17-24.

26 SCHLEICHER F. "Die Verteilung der Bodenpressung unter stanen Gründungskörpern".
Der Bauingenieur 13, Edition Springer, Berlin (1933).

27 SCHULTZE E. "Distribution of Stress Beneath a rigid Foundation". Proc. 5 th. Int. Conf. S.M. Paris (1961). V. 1 p 807-813.

28 TOUZOT G. "Etude de plaques rigides et flexibles reposant sur massifs élastiques". Thèse Doct. Spécialité. Grenoble. 1967.

29 VOGT F. "Uber die Berechnung der Fundament deformation". Arhandlinger utgit au Det Norske Videnkaps, Akademi Math. Natuw. Klasse, Oslo. 1925.

DEUXIEME PARTIE

MODELE ANISOTROPE POUR LES SOLS ET LES ROCHES

INTRODUCTION

Depuis les travaux de Boussinesq en 1885, l'élasticité linéaire et isotrope a été très largement utilisée comme loi de comportement des matériaux. En mécanique des sols, malgré les critiques souvent justifiées que soulève son emploi, elle reste à peu près le seul moyen de prévoir les distributions de contraintes dans un massif sous l'action d'une charge appliquée à sa surface (la connaissance de ces contraintes est indispensable à un calcul indirect du tassement par les méthodes oedométriques ou triaxiales).

Nous avons dans un premier temps étudié et discuté les hypothèses sur lesquelles est fondée l'élasticité linéaire et isotrope et qui, malheureusement, ne sont pas toujours acceptables pour les sols.

De très nombreuses expériences réalisées depuis quelques années ont confirmé, en particulier, que les sols naturels étaient le plus souvent anisotropes. Il ne faut pas oublier en effet qu'ils se sont déposés, puis consolidés sous l'action de la pesanteur. Aussi, n'est-il pas étonnant que leurs propriétés tant mécaniques que physiques soient différentes suivant la direction verticale et une horizontale ; l'orthotropie de révolution ou aelotropie rend parfaitement compte de cette anisotropie. A la suite de plusieurs chercheurs dont nous discutons les conclusions, nous avons donc étudié et complété ce modèle en proposant pour les sols et les roches une relation supplémentaire entre les différents paramètres.

Cette étude nous a permis de calculer les tassements et contraintes sous différents cas de charge, de donner l'expression de la pression du fluide interstitiel ainsi que les relations entre les paramètres obtenus par des essais sur échantillons drainés et ceux obtenus sur échantillons non drainés.

A la suite de ces travaux, il est intéressant de signaler que la plupart des désaccords constatés entre l'expérience et les résultats obtenus par l'élasticité disparait si on tient compte de l'anisotropie des sols.

1. - ELASTICITE LINEAIRE ET ISOTROPE

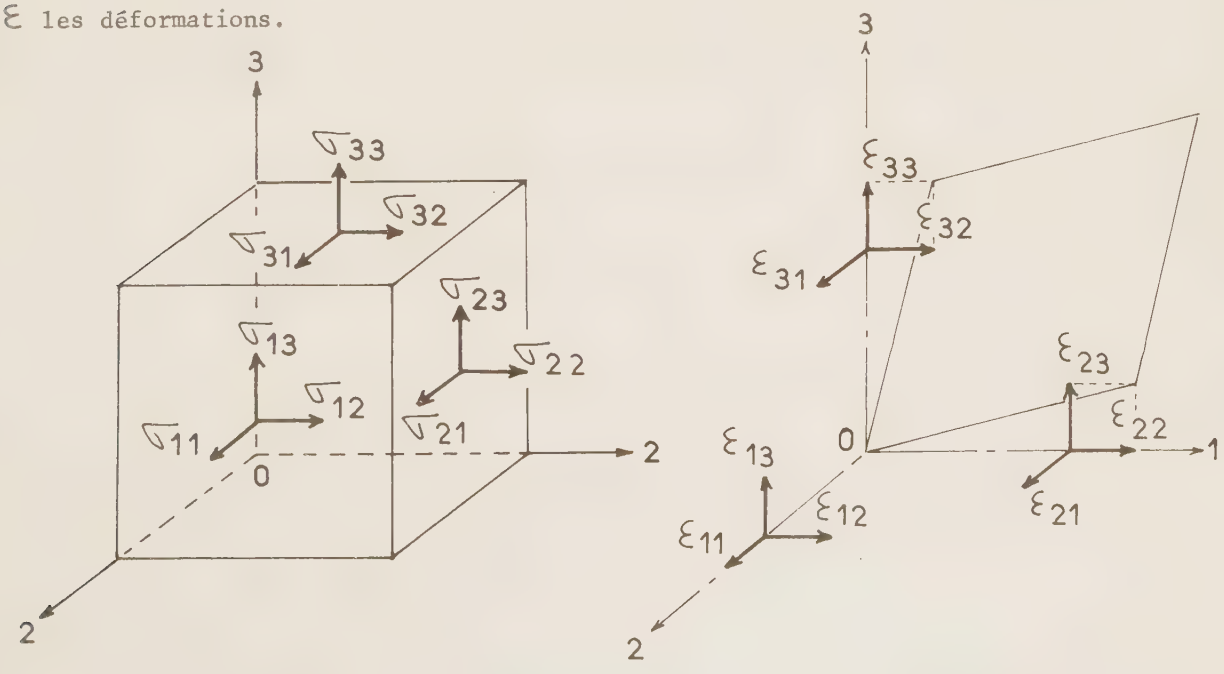
La loi la plus simple permettant de lier les déformations aux contraintes est de supposer qu'elles sont proportionnelles et que la relation ne dépend pas de la direction envisagée. Nous avons examiné les hypothèses nécessaires à une telle loi (ANGLES D'AURIAC [3]).

Notons d'abord qu'en mécanique des sols, on suppose en outre que le massif est composé de couches homogènes et, par suite, que pour une couche, la relation est la même en chacun de ses points.

1.1. Hypothèses

L'état de contrainte en un point se caractérise, comme les déformations, par neuf composantes (contraintes sur trois facettes perpendiculaires).

Appelons 1, 2 et 3 les axes du trièdre référence, σ les contraintes et ε les déformations.



Sur la figure de droite, on a représenté les déplacements des sommets du cube unité construit sur les axes 1, 2 et 3.

σ_{ij} composante suivant l'axe j de la contrainte s'exerçant sur la facette de normale i ;

ε_{kk} déformation unitaire suivant l'axe k ;

ε_{kl} ($k \neq 1$) moitié de la diminution de l'angle droit kol ou distorsion selon kl.

Les états de contraintes et de déformation peuvent donc se représenter par des tenseurs d'ordre 3:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

1.1.1. Loi ponctuelle

En élasticité, la relation déformation-état de contrainte n'est pas fonctionnelle mais ponctuelle ; autrement dit, elle ne doit pas dépendre du chemin parcouru pour passer d'un état à un autre.

1.1.2. Loi linéaire

La relation déformation-état de contrainte est linéaire, ce qui s'écrit dans le cas général :

$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl}\, \varepsilon_{kl}$ (avec la convention d'EINSTEIN) ou

$\sigma_{ij} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} C_{ij}^{kl}\, \varepsilon_{kl}$ (en écriture matricielle).

C_{ij}^{kl} sont des constantes au nombre de 81 (9 x 9).

On démontre facilement que moyennant l'hypothèse de la continuité des contraintes dans l'espace, on a au second ordre près $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

De plus, en élasticité infinitésimale, $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$.

Le nombre des coefficients est ainsi ramené à 36.

Mais, les fonctions σ_{ij} (ε_{kl}) ne sont pas quelconques ; l'hypothèse de la reversibilité des échanges d'énergie montre qu'elles doivent

satisfaire des relations d'intégrabilité ou de CAUCHY

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Ces conditions se traduisent par une symétrie de la matrice des coefficients C_{ij}^{kl} et leur nombre est ainsi réduit à 21 (cas général d'un corps Hookien).

1.1.3. Symétries

a - Symétrie de la loi par rapport aux plans 1,2 - 2,3 et, par conséquent 3,1

La loi est symétrique par rapport à un plan si lorsqu'on fait subir une symétrie par rapport à ce plan au tenseur-déformation (transmutation), le tenseur-contrainte est transmué de la même symétrie.

Dans le cas des symétries par rapport aux plans 1,2 - 2,3 et 3,1, la loi est dite orthotrope et il ne reste que 9 constantes indépendantes.

b - Orthotropie de révolution autour de l'axe 3

On suppose que si on transmue le tenseur déformation par une rotation quelconque autour de 3, le tenseur contrainte est transmué par la même rotation. Le nombre des paramètres est réduit à 5 et le tableau des C_{ij}^{kl} peut s'écrire en conservant les notations d'ANGLES D'AURIAC :

	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}	ε_{23}	ε_{31}	ε_{12}	ε_{32}	ε_{13}	ε_{21}
σ_{11}	A	F	D	0	0	0	0	0	0
σ_{22}	F	A	D	0	0	0	0	0	0
σ_{33}	D	D	C	0	0	0	0	0	0
σ_{23}	0	0	0	G	0	0	G	0	0
σ_{31}	0	0	0	0	G	0	0	G	0
σ_{12}	0	0	0	0	0	$\frac{A-F}{2}$	0	0	$\frac{A-F}{2}$
σ_{32}	0	0	0	G	0	0	G	0	0
σ_{13}	0	0	0	0	G	0	0	G	0
σ_{21}	0	0	0	0	0	$\frac{A-F}{2}$	0	0	$\frac{A-F}{2}$

que l'on peut condenser sachant que $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ et $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ en

	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}	γ_{23}	γ_{31}	γ_{12}
σ_{11}	A	F	D	0	0	0
σ_{22}	F	A	D	0	0	0
σ_{33}	D	D	C	0	0	0
σ_{23}	0	0	0	G	0	0
σ_{31}	0	0	0	0	G	0
σ_{12}	0	0	0	0	0	$\frac{A-F}{2}$

$\gamma_{kl} = 2\,\varepsilon_{kl}$ est alors la diminution de l'angle droit kol.

Notons que certains auteurs (KONING, GERRARD) introduisent le coefficient 2 à l'intérieur de la matrice en prenant le double des modules de cisaillement.

c - Isotropie

Si enfin la loi est aussi de révolution autour des axes 1 et 2 et donc autour de n'importe quel axe, elle est isotrope et le nombre des paramètres est ramené à 2. La matrice devient :

$$\begin{bmatrix} A & F & F & 0 & 0 & 0 \\ F & A & F & 0 & 0 & 0 \\ F & F & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A-F}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A-F}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A-F}{2} \end{bmatrix}$$

ou, avec les notations plus courantes de LAME.

$$\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

La matrice inverse donnant les déformations en fonction des contraintes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix}$$

E module d'YOUNG
ν coefficient de POISSON
(sans dimension)

Les relations liant ces différents paramètres sont :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = F$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{A-F}{2}$$

Cette dernière loi, très utilisée en résistance des matériaux, l'est également en mécanique des sols du fait de sa simplicité. Elle ne nécessite la détermination que de deux paramètres dont l'un (ν) est sans grande influence sur la grandeur des tassements ; d'autre part, la distribution, au sein d'un massif semi-infini, des contraintes agissant sur les facettes horizontales sous l'action d'une charge placée en surface ne dépend ni de E ni de ν .

Un grand nombre de cas de charge ont été envisagés, pour des massifs semi-infinis ou des multicouches, permettant le calcul des contraintes et des déplacements dans le massif (Table pour le calcul des Fondations, GIROUD).

1.2. Discussion des hypothèses

Il est bien évident que le sol n'est jamais ce massif idéal homogène et isotrope.

Selon TERZAGHI [94] , "une telle hypothèse n'est que rarement conforme à la réalité. Les différences que l'on observe avec l'isotropie élastique et l'homogénéité parfaite sont dues le plus souvent, soit à un feuilletage ou à une stratification caractéristique d'à peu près tous les sédiments, soit à une diminution rapide de la compressibilité avec la profondeur (propriété particulière aux terrains sableux)". Mais les différences entre les prévisions de la théorie et l'observation ont trop souvent conduit à condamner en bloc l'élasticité linéaire isotrope, sans que l'on sache chaque fois laquelle ou lesquelles des hypothèses il fallait incriminer. C'est pourquoi nous les discutons ici une à une.

1.2.1. Elasticité

L'hypothèse de l'élasticité (relation ponctuelle entre les déformations et les contraintes) entraîne les propriétés suivantes :

(a) Les déformations sont réversibles ;

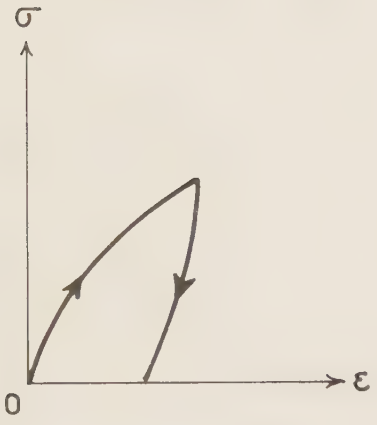
(b) La relation déformation-contrainte ne dépend pas du chemin parcouru pour passer d'un état à un autre.

Examinons dans quelle mesure ces propriétés sont vérifiées dans les sols ((a) n'est qu'une conséquence de (b) mais est plus facile à appréhender par l'expérience).

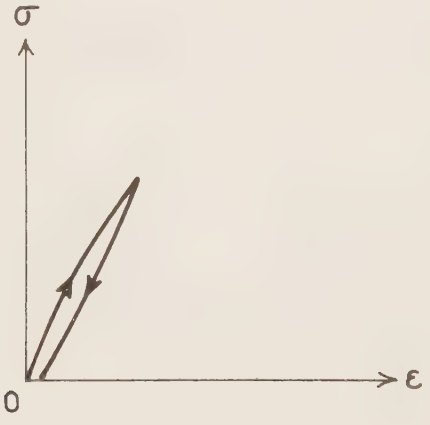
a) Réversibilité

Toutes les expériences ont prouvé que la déformation d'un sol sous un effort donné n'était pas entièrement réversible ; elle est la somme d'une composante irréversible et d'une composante réversible que l'on peut isoler au déchargement. Ce phénomène qui apparaît pratiquement pour tous les matériaux (roche, acier) n'est pas un obstacle à l'utilisation de l'élasticité dès lors que les déformations irréversibles sont négligeables devant la partie réversible.

Si l'on soumet un échantillon à un cycle de chargement-déchargement, la courbe effort-déformation présente une boucle d'hysteresis dont la largeur représente la composante irréversible de la déformation.



Premier cycle



Cycles suivants

Lorsque l'on charge le sol (par exemple, dans une cellule triaxiale), les forces agissant sur les particules sont modifiées. Comme il n'y a pas homogénéité et symétrie parfaites dans l'arrangement de ces particules, certains points vont supporter une part plus grande de l'accroissement de charge (même dans un champ de contraintes dit homogène : photo-élasticité sur empilement de billes, SCHLOSSER [88]). Il peut alors arriver qu'en ces points les plus sollicités, le nouvel état corresponde à un équilibre instable : il y aura donc glissement et réarrangement des particules de façon que la nouvelle structure puisse supporter la charge (écrouissage). L'énergie dépensée pendant ce réarrangement ne peut être restituée au déchargement ; les glissements de particules ainsi que les déformations qu'ils entraînent pour l'échantillon seront donc irréversibles. Dans les argiles, il peut se produire, en autre, des agrégations de plusieurs particules, également irréversibles (RUNACHER [82] p.129-130). La composante réversible des déformations serait due au contraire aux déformations élastiques des particules elles-mêmes (BJERRUM [11], EL-SOHBY et ANDRAWES [30]).

Cette schématisation du mécanisme de l'irréversibilité permet, cependant, de prévoir deux phénomènes que les essais mettent en évidence :

- si on effectue un déchargement puis un rechargement à une valeur inférieure ou égale à la première, il ne doit pas se produire, en principe, de nouvelles déformations irréversibles puisque la structure précédemment établie peut supporter cette charge.

- on peut supposer que plus la charge appliquée est importante, plus nombreux seront les points où des glissements se produiront et plus grande sera la déformation irréversible (qui peut conduire même à la rupture).

Toutes les expériences réalisées, tant sur les sables que sur les argiles ont montré que la composante irréversible était, en effet, importante pour le premier cycle mais devenait ensuite assez faible.

Selon KO et SCOTT [57] qui ont effectué des essais triaxiaux sur des sables, toute la déformation irréversible résulterait même du premier chargement, les cycles suivant ne produisant que des déformations réversibles. Cette conclusion diffère légèrement de celle d'EL SOHBY et ANDRAWES [30] comme on peut le voir sur la figure 1.1. où la déformation irréversible due au second chargement, bien que faible devant celle du premier n'est pas nulle.

KO et SCOTT ont, d'autre part, donné pour le premier cycle (figure 1.2.) la valeur du rapport de la déformation réversible à la déformation totale et ont remarqué que pour de très faibles déviateurs, la réversibilité était importante même au premier cycle (80 à 60 % pour la plus faible charge appliquée suivant que le sable est dense ou non).

Les résultats sont identiques en ce qui concerne les argiles. Les essais non drainés sur des échantillons intacts effectués par SANGREY, HENKEL et ESRIG [86] ont montré qu'il existait un niveau critique de l'intensité de contrainte au-dessous duquel les boucles d'hystéresis étaient très fermées. Pour l'argile de NEWFIELD testée, cette charge critique valait les $\frac{2}{3}$ de la contrainte de rupture mesurée en non drainé.

Les travaux de BIAREZ [9] et ceux de SILVEIRA [89] sur des argiles compactées ont établi que pour ces argiles la réversibilité était importante (90 % au second cycle selon BIAREZ).

Signalons enfin que la réversibilité des déformations pour un sol donné augmente avec le pourcentage d'argile (BJERRUM [11]).

Cependant, dans toutes les expériences précédentes, les chargements successifs étaient toujours effectués suivant le même chemin et on peut se demander ce que devient le degré de réversibilité lorsque le second chargement suit un chemin différent du premier.

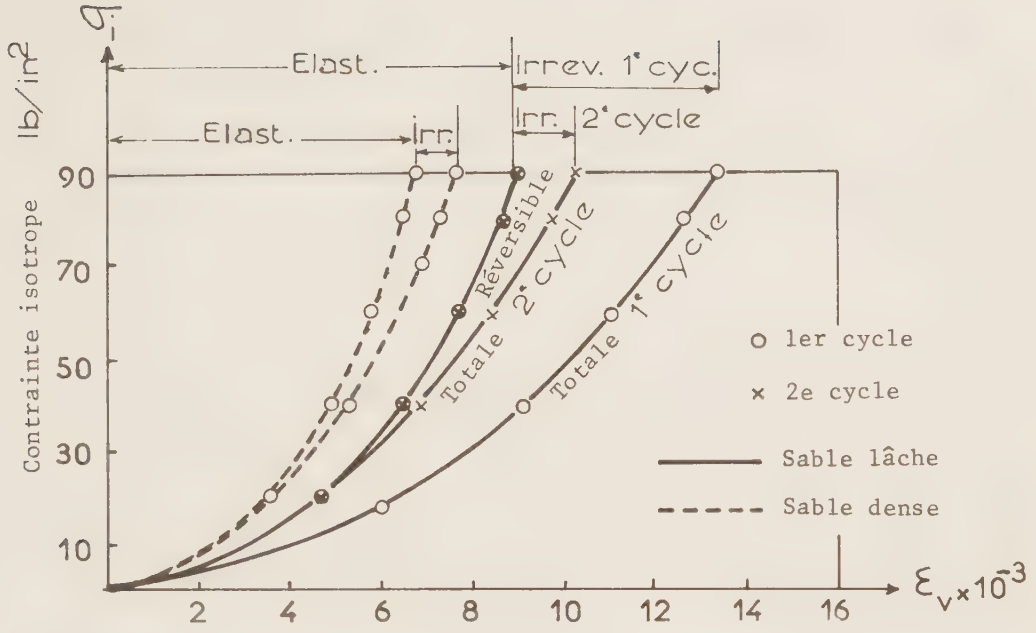


Figure 1.1. Compression isotrope d'un sable de Calais.
Déformations volumiques réversibles et totales. D'après EL-SOHBY.

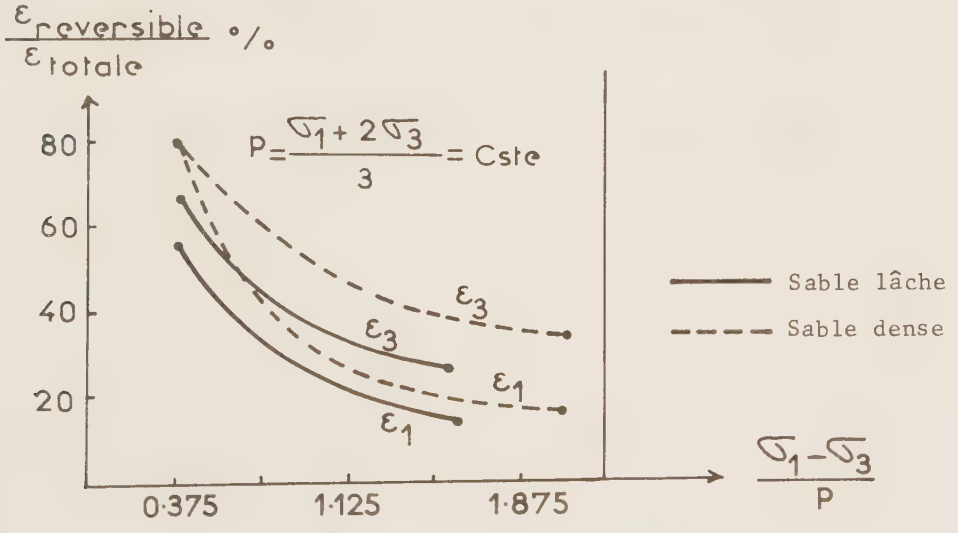


Figure 1.2. Cisaillement triaxial d'un sable d'Ottawa.
Degré de réversibilité en fonction du déviateur. D'après KO et SCOTT.

Selon KO et SCOTT [57], le comportement élastique n'a lieu que pour une bande très étroite entourant le chemin de préchargement. Les recherches entreprises par SCHLOSSER [88] sur les sables et les argiles mettent en effet en évidence l'existence d'un domaine d'élasticité approchée autour du chemin de contraintes qui a provoqué l'écrouissage du matériau. Les figures 1.3. et 1.4. représentent ce domaine dans le cas d'un préchargement isotrope ou à $K_o = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$ constant.

Domaine d'élasticité approchée d'un sable.
D'après SCHLOSSER.

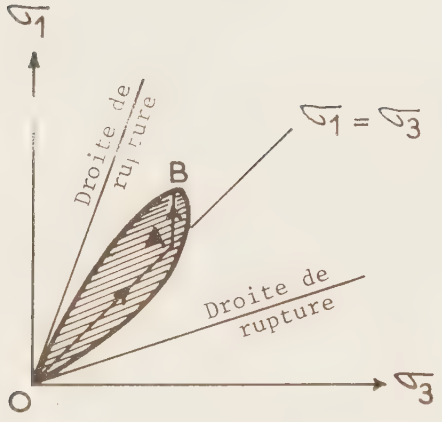


Figure 1.3.
Domaine créé par le chemin OAB

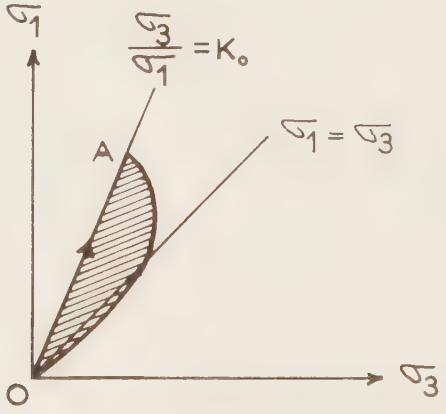


Figure 1.4.
Domaine créé par le chemin OA.

Il apparaît donc que (sauf peut-être sous de très faibles sollicitations : cf figure 1.2.), la réversibilité n'est satisfaisante qu'après un premier chargement et sous réserve que le cheminement des contraintes ne soit pas trop différent de celui du préchargement.

b) Indépendance du chemin

Comme l'ont signalé COON et EVANS [18] et [19], la réversibilité n'est pas une condition suffisante pour admettre l'élasticité : les déformations peuvent en effet être réversibles mais dépendre du chemin suivi (corps hypoélastique).

Les expériences les plus complètes concernant ce problème sont celles d'HOLUBEC [51] effectuées sur les sables. Partant d'échantillons de même indice des vides, HOLUBEC les a amenés dans une cellule triaxiale à un même état de contraintes, mais par différents chemins.

Il a alors mesuré les modules d'YOUNG relatifs aux déformations réversibles et la figure 1.5. montre que les valeurs obtenues dépendent peu du chemin suivi. Ce résultat encourageant doit, cependant être nuancé. Tous les chemins envisagés par HOLUBEC sont tels que les contraintes latérales et axiales ont toujours été croissantes. Il est certain que les conclusions seraient moins nettes si l'échantillon avait subi des contraintes axiales ou latérales supérieures respectivement à σ_1 ou σ_3, puis avait été déchargé jusqu'à (σ_1, σ_3). KO et SCOTT arrivent d'ailleurs au même résultat qu'HOLUBEC, mais ils émettent la réserve ci-dessus.

Certains chercheurs ont pris clairement position sur le problème de l'utilisation de l'élasticité dans les projets de fondation. Ainsi, selon SAADA [83], "pour les argiles saturées, les distributions de contraintes doivent être calculées par l'élasticité, non parce qu'elle est la seule source d'informations théoriques disponible, mais parce qu'elle assure l'approche théorique correcte au problème".

Pour TSCHEBOTARIOFF [95], "les solutions de BOUSSINESQ peuvent être appliquées avec une précision raisonnable aux sols à cohésion et avec quelques limitations aux sols granulaires".

A la suite de cette courte étude, nous pensons plutôt, et cette opinion est partagée par SUKLJE [92], que l'élasticité ne s'applique valablement qu'à des sols ayant déjà subi un cycle de sollicitation (surconsolidation) : déchargement par disparition des couches supérieures (érosion ou fouille), méthode du préchargement. Il faut, en outre, que la charge soit faible devant la charge de rupture (coefficient de sécurité au moins égal à 3 d'après TERZAGHI, ce qui est le plus souvent le cas).

Il est de plus très intéressant de remarquer (GIROUD [41]) que les caractéristiques mécaniques du matériau ont assez peu d'influence sur les répartitions de contraintes provoquées au sein du massif par la charge (dans le cas idéal d'un massif semi-infini élastique et isotrope par exemple, σ_z ne dépend

Le module axial E a été mesuré pour plusieurs états de contraintes (σ_1, σ_3) atteints par des chemins différents.

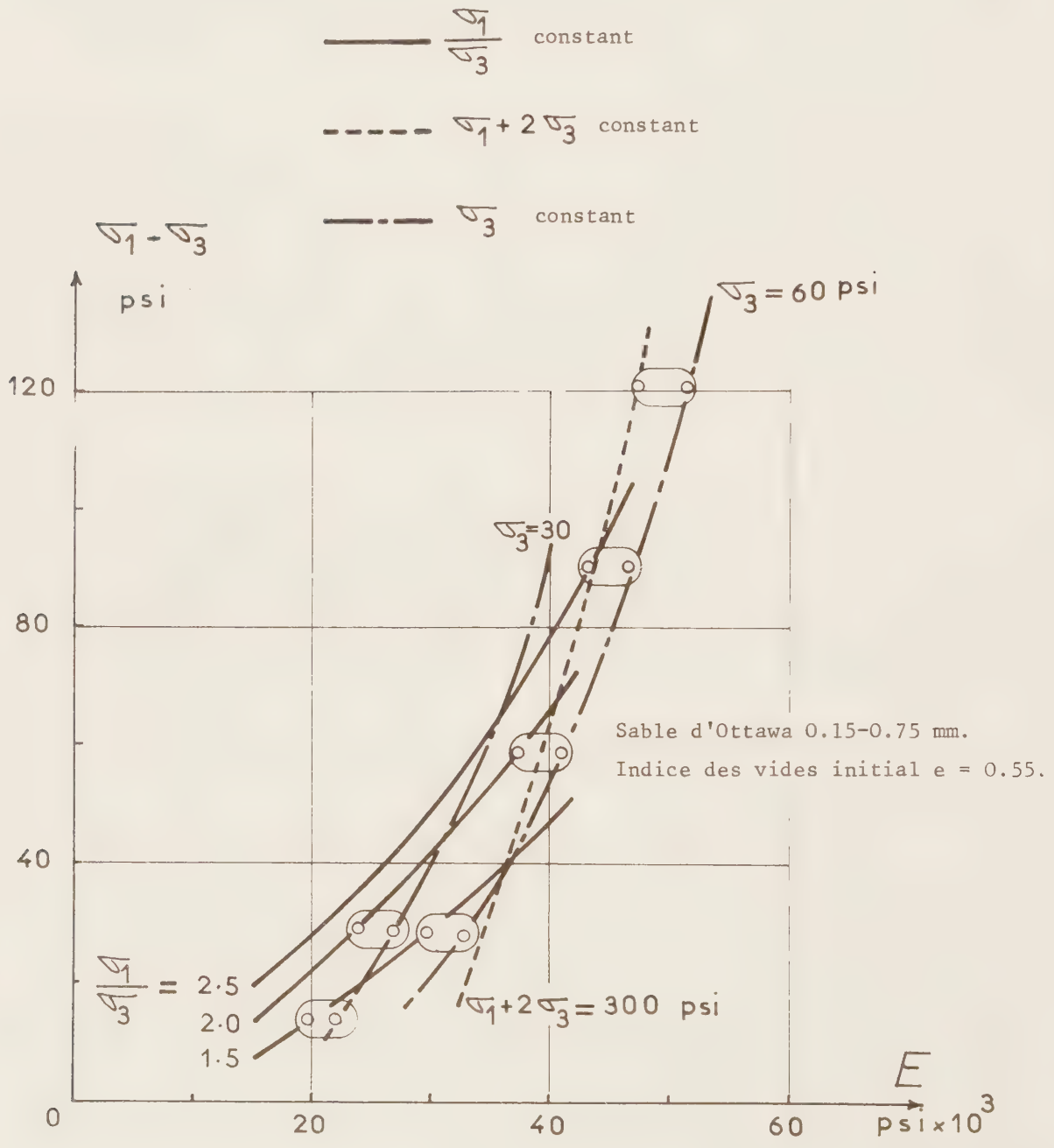


Figure 1.5. Unicité du module E (d'après HOLUBEC).

ni de E ni de ν). La prévision, par l'élasticité, des distributions de contraintes sera donc en règle général, bien meilleure que celle des tassements (Etudes expérimentales de MORGAN et GERRARD [74]) ; d'où l'intérêt des calculs indirects qui reposent sur une simulation à l'oedomètre ou au triaxial du chargement réel du sol.

1.2.1. Linéarité

L'hypothèse de linéarité nécessite que les contraintes soient proportionnelles aux déformations.

Il est certain que cette propriété n'est pas vraie pour les sols lorsque la charge décrit tout l'intervalle des valeurs admissibles (d'une charge très faible à la charge de rupture). A l'opposé, on peut toujours, pour un domaine de variation des contraintes suffisamment petit, supposer avec une précision satisfaisante que la relation est linéaire.

Il est donc parfaitement inutile de discuter de la linéarité sans définir le domaine de variations des contraintes (ou des déformations).

Comme nous n'étudions ici que le comportement des sols avant la rupture, c'est-à-dire pour les états qu'il connaîtra sous une fondation en fonctionnement normal, et sachant que les coefficients de sécurité utilisés dans la pratique sont rarement inférieurs à 3, nous ne considérons que des charges inférieures au $\frac{1}{3}$ de la charge de rupture.

A l'intérieur d'un tel domaine de variation, la relation contrainte-déformation peut, pour certains sols, être supposée linéaire.

Il en est ainsi, en général, des argiles surconsolidées comme le montre l'exemple de la figure 1.6. (argile de St-Vallier). HOLUBEC, puis KO et SCOTT ayant soumis dans un triaxial des sables à des cisaillements sous contrainte latérale σ_3 ou contrainte moyenne constante ont également constaté qu'après un premier chargement, la relation entre le déviateur $\sigma_1 - \sigma_3$ et la déformation axiale était linéaire (figure 1.7.).

D'autre part, la courbe charge-enfoncement déduite des essais de chargement par plaques présente très souvent une partie linéaire.

Le comportement des matériaux pulvérulents sous contrainte isotrope est, au contraire, non linéaire même après plusieurs chargements (figure 1.1.). Notons aussi que la linéarité observée dans des essais drainés est meilleure que celle des essais non drainés.

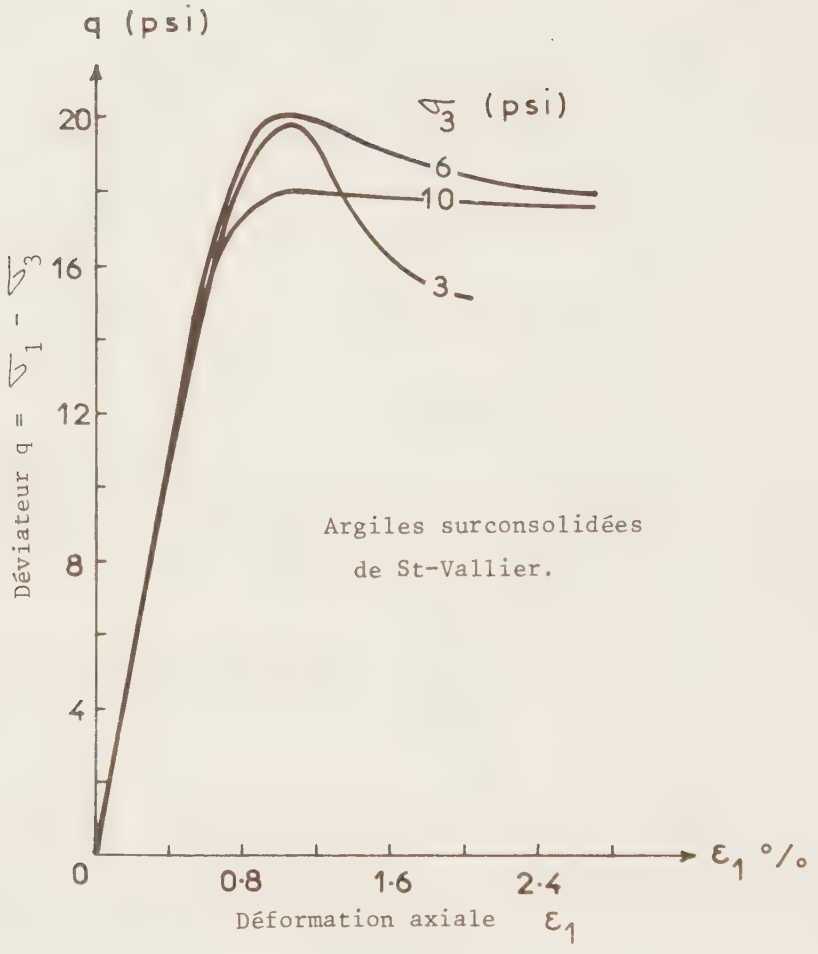


Figure 1.6. Essais drainés (d'après LO).

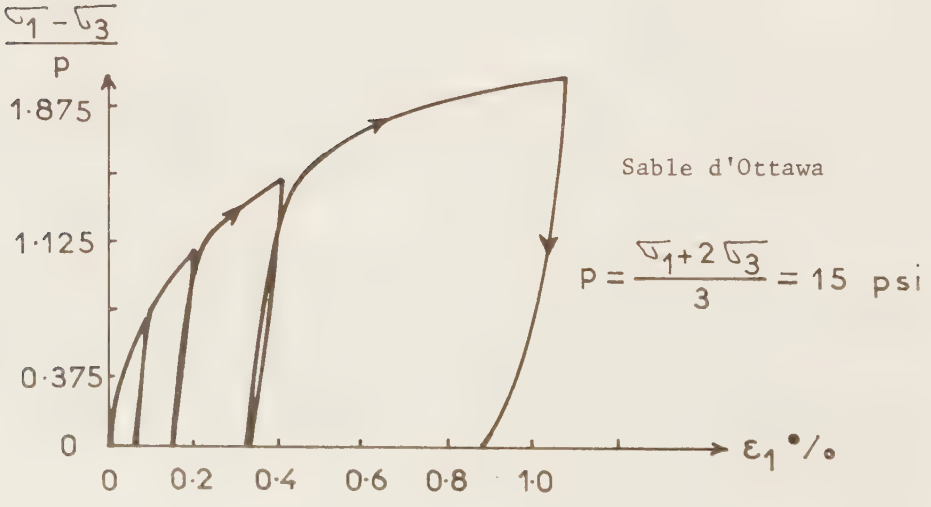


Figure 1.7. Essais à contrainte moyenne constante (d'après KO et SCOTT).

Dans tous les cas où la linéarité même approchée n'est pas acceptable, il peut être intéressant de donner une forme incrémentale à la loi de comportement (HOLUBEC [51], COON et EVANS [18] et [19], MERKLE [67]).

Mais le nombre des coefficients à déterminer expérimentalement devient alors important (12 pour la loi proposée par COON et EVANS).

On résoud encore le problème dans les calculs indirects de tassement en utilisant des modules sécants pour déterminer les déformations. Néanmoins, les contraintes provoquées dans le massif par la charge sont le plus souvent évaluées avec l'hypothèse de l'élasticité linéaire.

1.2.3. Isotropie

Contrairement à l'hypothèse souvent admise, de très nombreux sols sont anisotropes quant à leur structure et leurs propriétés mécaniques.

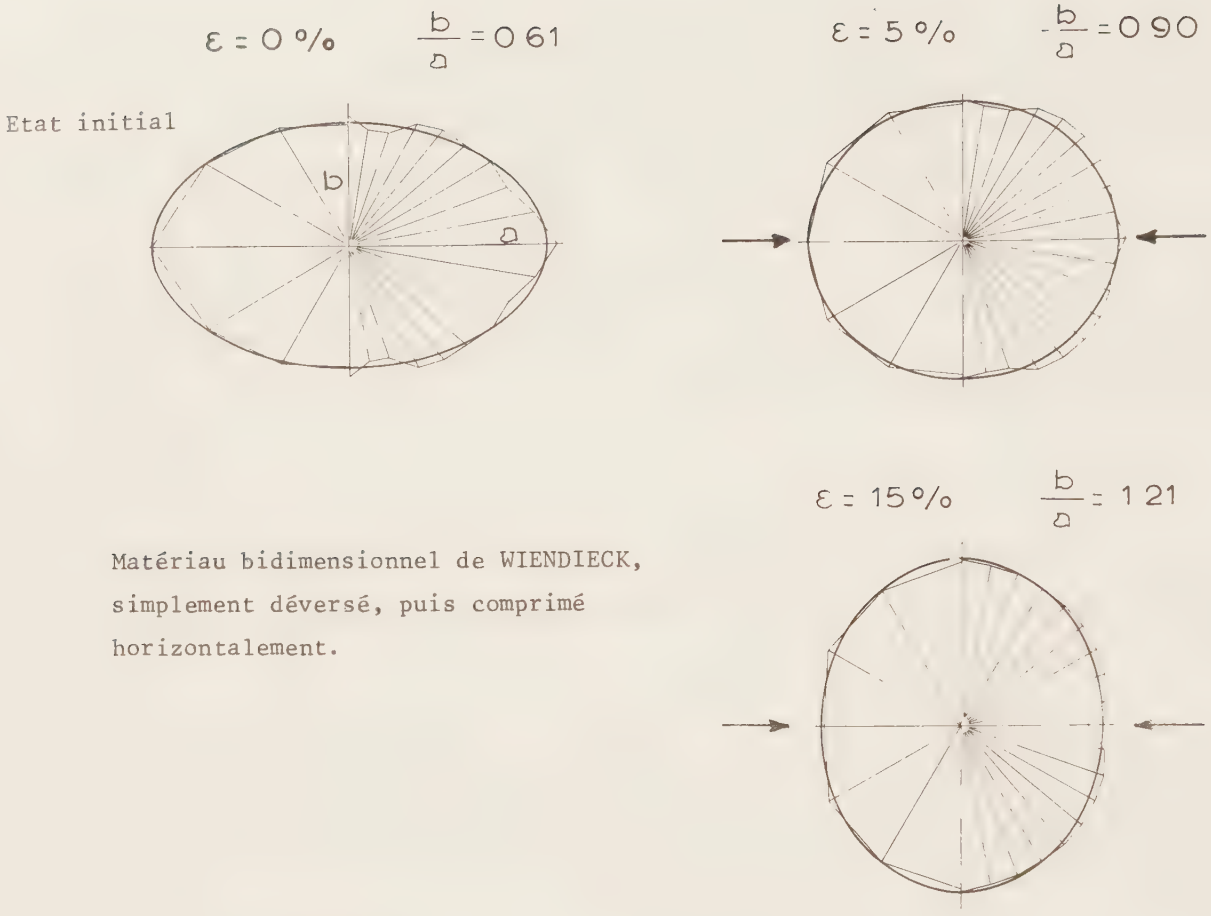
a - Anisotropie de structure

Il est généralement reconnu que sous l'action d'un déviateur, les particules constituant l'échantillon de sol prennent une orientation privilégiée ; il ne nous est pas possible de décrire ici tous les travaux relatifs à cette question et nous nous contenterons de citer les auteurs dont nous reproduisons les résultats.

La mesure (directe !) de l'orientation des plans de contact entre grains a été effectuée par WIENDIECK [100] pour des particules bidimensionnelles découpées dans une plaque de lucoflex, et par FIELD cité par BOEHLER et GIROUD [12], pour un sol réel composé de gravier roulé. Les résultats sont donnés sous forme d'une courbe polaire (ellipse) représentant le nombre de plans de contact en fonction de leur orientation (figure 1.8.).

Différentes méthodes ont, par contre, été utilisées pour déterminer l'orientation des particules.

- Observation directe au microscope électronique réalisée par KIRKPATRICK et RENNIE [56].
- Microscope pétrographique utilisé par LAFEBER [59] et par INGLES [53].
- Méthode indirecte par diffraction de rayons X. BOEHLER [12], QUIGLEY [81] (figure 1.9.).



Matériau bidimensionnel de WIENDIECK, simplement déversé, puis comprimé horizontalement.

Gravier roulé de FIELD (Cf. ref. [12] Boehler - Giroud)

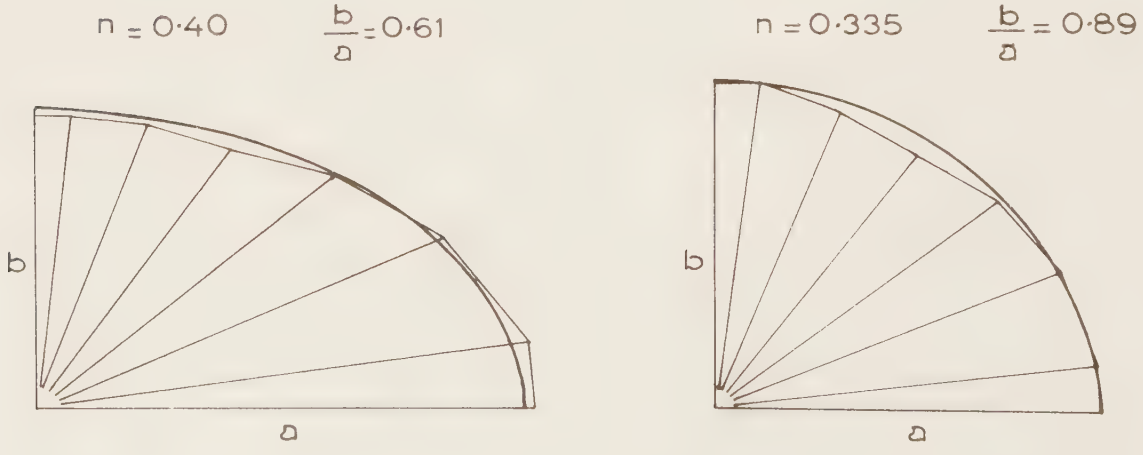


Figure 1.8. Courbes polaires donnant le nombre de plans de contact entre particules en fonction de leur orientation.

Toutes les conclusions sont identiques et rejoignent celles des chercheurs cités par RUNACHER [82]. Comme l'illustre la figure 1.10., les particules plates d'argile (ou les agrégats de particules) tendent à devenir parallèles entre elles et perpendiculaires à la contrainte principale majeure, que les déplacements latéraux soient possibles (triaxial, compression simple) ou non (oedomètre, consolidation in-situ). Cette réorientation se produit même sous de faibles charges si l'argile est remaniée (essais oedométriques de QUIGLEY, puis de KIRKPATRICK) ; dans le cas contraire, elle ne commence que lorsque la contrainte de consolidation est atteinte (figure 1.9.).

Dans les sables, les particules allongées s'orientent comme les particules d'argiles et les plans de contact perpendiculaires à la contrainte principale majeure sont plus nombreux que les autres (Ellipses de la figure 1.8.).

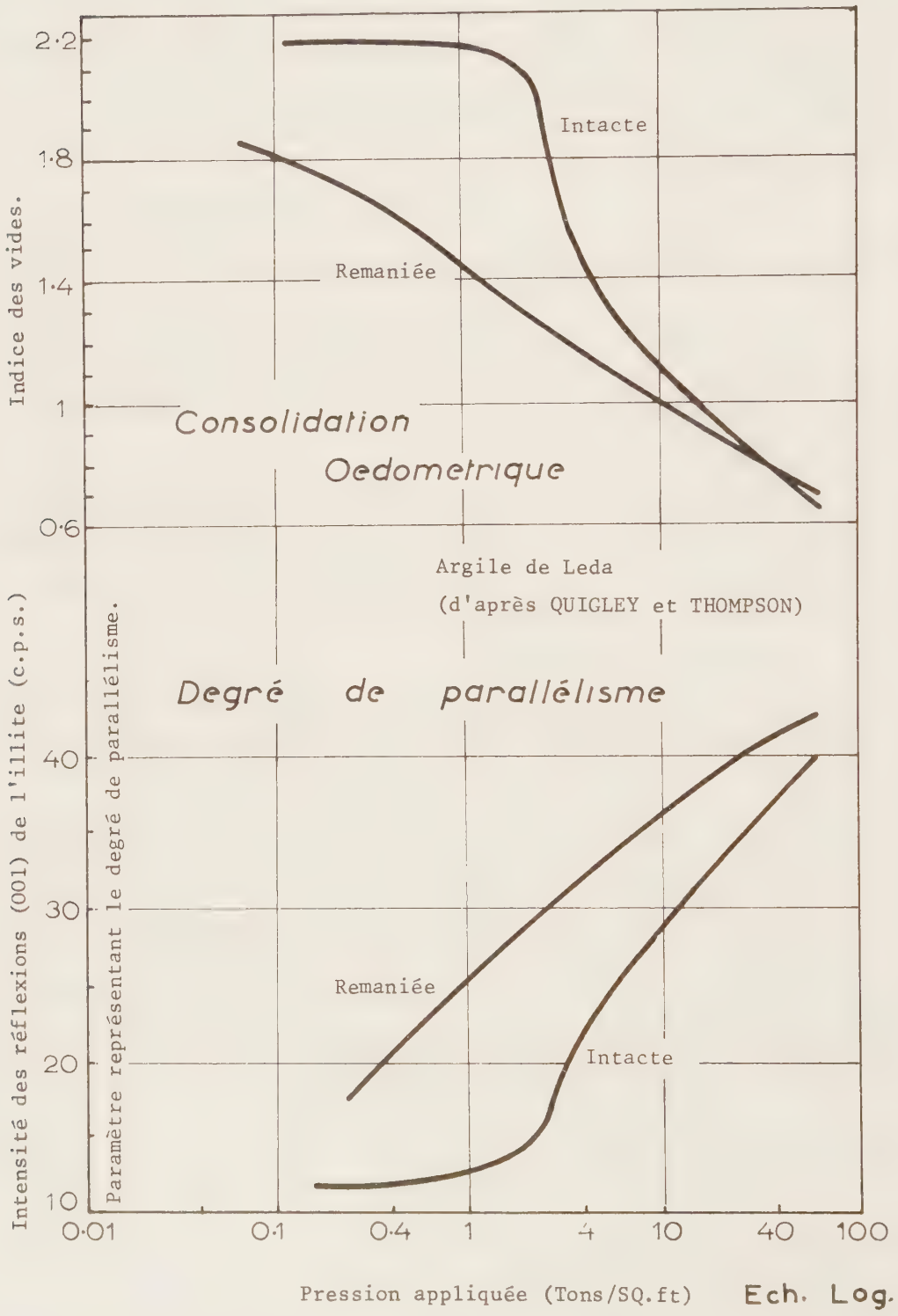
Les sols naturels se consolidant sous l'action de la pesanteur (poids des couches supérieures) comme dans un oedomètre, auront donc en général un arrangement de particules à orientation préférentielle.

Or, on connaît l'influence considérable de la structure d'un sol sur ses propriétés mécaniques et physiques : courbe effort-déformation, résistance limite, retrait, sensibilité, perméabilité (Etude bibliographique de RUNACHER). Il est donc évident qu'une structure à haut degré de parallélisme (figure 1.10.c.) conduira à des propriétés différentes suivant la direction considérée.

De très nombreuses divergences avec l'isotropie ont en effet été constatées, tant dans les argiles que dans les sables ou les roches, et nous rappelons ci-dessous les plus convaincantes.

Notons, cependant, que si un état de contraintes anisotrope peut créer, annuler ou inverser une anisotropie de structure (Travaux précédents, BIAREZ [9]) le mode de formation du dépôt conditionne la structure initiale, en particulier pour les argiles (elles seront par exemple floculées ou défloculées suivant que la sédimentation a eu lieu dans l'eau salée ou non). Des changements de structure peuvent également avoir lieu dans les argiles sous l'action de phénomènes physico-chimiques : teneur en eau, concentration de l'électrolyte, valence et taille des cations, P_H, température, etc... (RUNACHER).

Figure 1.9. Consolidation anisotrope (oedomètre).
Evolution de l'indice des vides et du degré de parallélisme des particules en fonction de la contrainte appliquée.



b - Anisotropie des propriétés mécaniques

- Résistances limites (Ø et c)

Nous notons v la direction suivant laquelle s'est effectuée la consolidation (le plus souvent verticale) et h les directions perpendiculaires.

DAVIS et CHRISTIAN [21] ont rassemblé des résultats d'essais non drainés réalisés sur des argiles et ont constaté que $\frac{C_{uh}}{C_{uv}}$ allait de 0.75 à 1.56 ; les essais de MITCHELL [73] ont donné $\frac{C_{uh}}{C_{uv}} = 1{,}12$.

En compression simple, BOEHLER a obtenu $\frac{C_h}{C_v} = 0.73$ et DUNCAN et SEED [27] $\frac{C_h}{C_v}$ compris entre 0.81 et 1.38 (Travaux de BISHOP, WARD, HORSLEV, LO).

Pour les sables, les essais ont été effectués en les cisaillant suivant la direction de remplissage ou suivant une perpendiculaire ; l'angle de frottement Ø est plus fort dans le premier cas de 2° suivant ARTHUR et MENZIES [4], 3° suivant DUNSTAN [29] et d'environ 5° d'après PHILLIPS et MAY (cités par ARTHUR).

De nombreux chercheurs ont observé que l'anisotropie de déformation (modules d'Young) était plus fréquente et, en général, plus prononcée que l'anisotropie de rupture (Ø et c). BARDEN [7] explique ce phénomène en faisant remarquer que l'anisotropie de déformation est due principalement à l'orientation préférentielle des particules et qu'elle est donc plutôt la règle que l'exception pour les sols. Par contre, le développement de la rupture obéit au critère d'énergie minimum et est gouverné par l'existence de "défauts de structure" (macropores, fissures, présence de particules différentes) dont l'orientation préférentielle se rencontre plus rarement.

- Anisotropie de déformation

On la décèle en soumettant un échantillon à une compression isotrope ou en déterminant les modules suivant différentes directions.

La première méthode a été utilisée par MITCHELL sur une argile d'abord consolidée verticalement à l'oedomètre et par WIENDIECK puis EL SOHBY pour des sables déversés suivant la verticale.

Le rapport $\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_v}$ entre les déformations horizontales et verticales va de 0.5 pour l'argile à 2 pour les sables. Dans les deux cas, il se rapproche de l'unité dès le second cycle (anisotropie détruite par une compression isotrope). Il est plus éloigné de 1 pour les sables lâches que pour les sables denses (plus isotropes).

La mesure directe des modules suivant différentes directions a été très souvent effectuée.

Les essais réalisés sur les sables conduisent tous à des rapports $\frac{E_h}{E_v} < 1$, si v est la direction de remplissage ou celle de la plus grande contrainte subite (figure 1.11.); ce rapport descend jusqu'à 0.5 pour ARTHUR et MENZIES, à 0.4 pour HOLUBEC et est voisin de 0.7 pour le sable non remanié testé par LAFEBER.

La figure 1.11. montre clairement que sous des déviateurs importants, le sable est très anisotrope.

Ces mesures ont également été faites sur des argiles consolidées anisotropiquement au laboratoire (oedomètre pour BOEHLER et pour MITCHELL, consolidation sous $K_o = 0.5$ pour KIRKPATRICK). Les échantillons à axe horizontal (mesure de E_h) sont plus compressibles que les échantillons verticaux selon MITCHELL et KIRKPATRICK ; ils le sont moins d'après BOEHLER, sans qu'il nous soit possible d'expliquer cette divergence.

Les essais rapportés par LUSHNIKOV et VULIS [65] et relatifs à des argiles remaniées ou non montrent que le rapport $\frac{E_h}{E_v}$ est compris entre 0.4 et 2.5.

Nous verrons en particulier au § 2.1.3.b. que les échantillons non remaniés d'argiles fortement surconsolidées présentent un rapport $\frac{E_h}{E_v}$ toujours supérieur à 1 et qu'il peut atteindre 3.

Quant aux roches, l'anisotropie de module atteint 2.54 pour les granites testés par PERES RODRIGUES [76] et 2.87 pour ceux de DOUGLAS [26] ; elle est toujours plus grande que l'anisotropie de résistance limite à la compression simple.

Nous proposons au § 2.1.3. le tableau 2.5. des valeurs typiques de $\frac{E_h}{E_v}$ dans les différents sols naturels.

- Pression interstitielle

Des études ont montré que dans de nombreux sols, le développement de la pression interstitielle était fonction de la direction des contraintes appliquées (essais de ZUR et XISEMAN [102] sur un loess argileux, de HELENELLUND [47] sur de la tourbe, et MITCHELL [73], DUNCAN [28] et LO [63] sur des argiles remaniées ou non). En particulier, le coefficient A proposé par SKEMPTON ($\Delta u = \Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$ si le sol est saturé) peut être multiplié par 3 lorsque l'axe suivant lequel est prélevé l'échantillon passe de la verticale à l'horizontale.

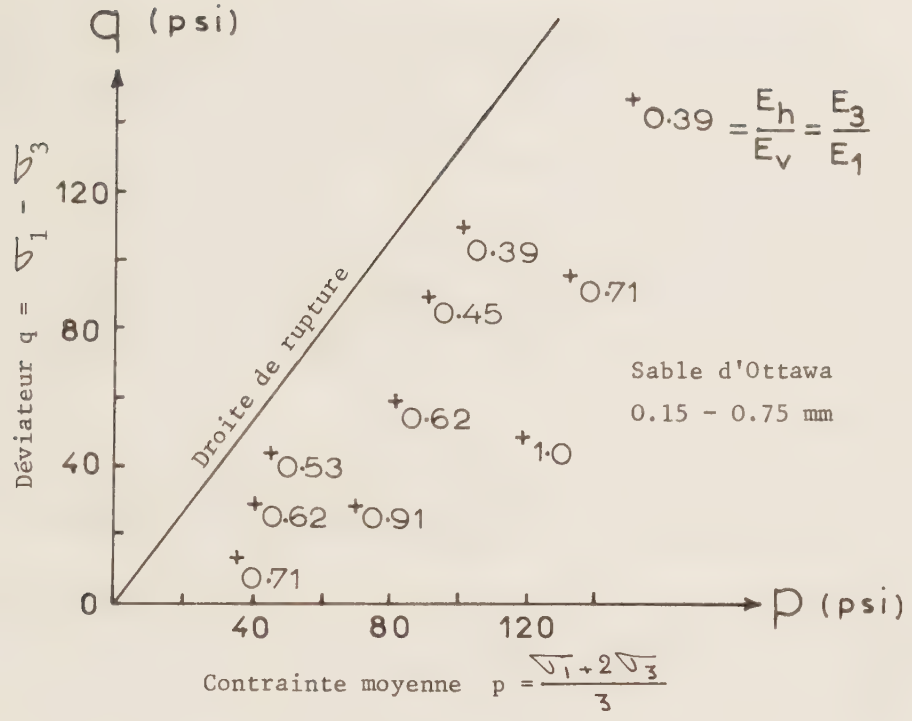
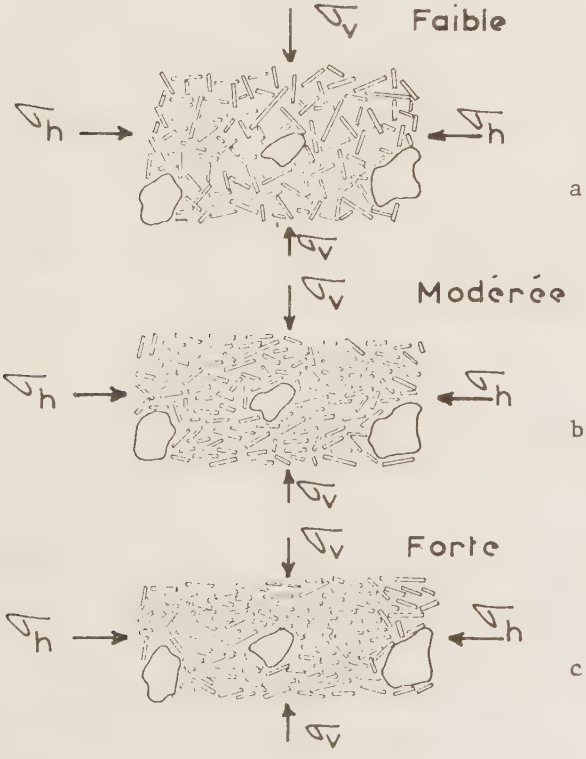


Figure 1.11 Valeurs du rapport $\frac{E_h}{E_v}$ en fonction de l'état de contrainte (p, q). (D'après HOLUBEC).



a - Structure en "château de cartes"

b - Structure "sub-parallèle"

c - Structure parallèle

Figure 1.10 Structure d'une argile marine à différents stades de la consolidation anisotrope (D'après QUIGLEY).

De très nombreux sols présentent donc une anisotropie de déformation dont le degré peut être important. Il convient de prendre en compte cette anisotropie si on veut une meilleure précision sur les calculs de tassements (DAVIS - POULOS [22] p 72). BERRY et FAIRHURST [8] ont montré sur des roches que l'hypothèse de l'isotropie pouvait conduire à des erreurs considérables (50 % pour l'exemple proposé de mesure des contraintes in-situ).

Nous verrons, en outre, que bien des désaccords entre la théorie et l'observation disparaissent si on tient compte de l'anisotropie de déformation des sols.

1.3. Tentatives pour s'affranchir de l'isotropie

Ces critiques à l'utilisation de la théorie de BOUSSINESQ pour les sols, étaient connues depuis longtemps et un certain nombre de travaux ont été en particulier réalisés pour tenir compte de l'anisotropie des sols.

1.3.1. Théorie de WESTERGAARD

WESTERGAARD [99] étudia les sols dont la résistance aux déformations latérales est très grande devant la résistance aux déformations verticales (Argiles très surconsolidées). Sa théorie qui consiste à supposer que le massif est renforcé par des fibres horizontales inextensibles conduit à des courbes de répartitions de σ_z pour z constant plus "étalées" que celles obtenues par BOUSSINESQ.

Elle n'est, en fait, qu'un cas limite de l'aelotropie correspondant à une valeur infinie de $\frac{E_h}{E_v}$ et à des valeurs nulles de ν_{hh} et ν_{hv} (cf § 5.2.2.). L'aelotropie permet donc une approche plus fine de la réalité que la théorie de WESTERGAARD.

1.3.2. Facteur de concentration

On a remarqué par contre que dans les sables, les contraintes verticales sont plus élevées sous la charge que celles prévues par l'élasticité isotrope (TERZAGHI [94], MORGAN et GERRARD [74]). Reprenant une idée de GRIFFITH, FROLICH [33] introduisit dans les formules de BOUSSINESQ correspondant au cas $\nu = 0.5$, un "facteur de concentration" permettant de rendre compte de ce phénomène. Un tel modèle ne peut donc s'appliquer qu'aux sables incompressibles et il fait intervenir un coefficient parfaitement arbitraire qu'on peut difficilement relier aux propriétés du sol (Tentatives de HODE [48] et de BRANDT [13]).

Nous verrons que le modèle aelotrope avec les valeurs des modules E_h et E_v mesurées dans les sables conduit précisément à une concentration des contraintes verticales sous la charge (§ 5.2.2.).

1.3.3. Aelotropie

La loi la plus satisfaisante pour tenir compte du fait que le sol n'a pas les mêmes propriétés suivant une direction verticale et suivant les horizontales est l'orthotropie de révolution ou aelotropie.

De nombreux chercheurs ont travaillé à ce modèle (WOLF [101], LEKNITSKII [60], KONING [58], BARDEN [6], MICHELL [68], MILOVIC [69] à [72], GERRARD [34] à [38], HARRISON [45] et [46], GUTMAN [43], DE URENA [24], PICKERING [78] à [80], URIEL [96] et [97]) et nous discutons plus loin leurs résultats.

2. - ETUDE DE L'ORTHOTROPIE DE REVOLUTION OU AELOTROPIE

Comme nous l'avons vu (§ 1.1.3.), l'aelotropie est définie par 5 constantes indépendantes. Dans le but de déterminer si certains de ces paramètres sont plus importants que d'autres (comme l'ont suggéré plusieurs auteurs) nous avons d'abord cherché entre quelles valeurs ils pouvaient varier (§ 2.1.) et quelles étaient leurs influences respectives sur les tassements et les distributions de contraintes (§ 2.4.).

2.1. Paramètres de l'aelotropie

2.1.1. Relations contraintes-déformations

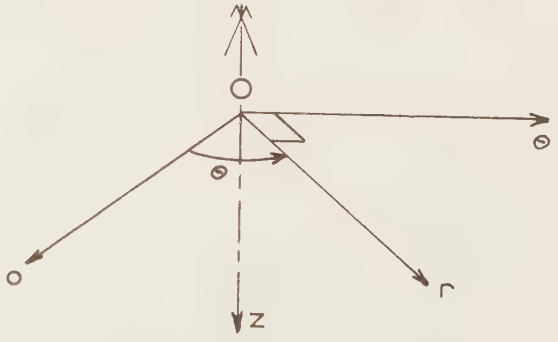
Nous supposerons, ce qui est le plus souvent le cas dans les sols, que l'axe de révolution 33 est vertical.

a - Repère d'aelotropie

Choisissons d'abord le repère de façon que l'un des axes par exemple oz soit confondu avec l'axe de révolution.

La relation contrainte-déformation devient :

	ε_r	ε_θ	ε_z	$\gamma_{\theta z}$	γ_{zr}	$\gamma_{r\theta}$
σ_r	A	F	D	0	0	0
σ_θ	F	A	D	0	0	0
σ_z	D	D	C	0	0	0
$\tau_{\theta z}$	0	0	0	G	0	0
τ_{zr}	0	0	0	0	G	0
$\tau_{r\theta}$	0	0	0	0	0	$\frac{A-F}{2}$



γ_{ij} est la diminution de l'angle droit ioj .

G est le module de cisaillement dans un plan vertical et ν_{rr}, ν_{rv} et ν_{vr} les coefficients de POISSON. Le premier indice est relatif à la

contrainte, le second à la déformation.

La relation donnant les déformations en fonction des contraintes s'écrit :

	σ_r	σ_θ	σ_z	$\tau_{\theta z}$	τ_{zr}	$\tau_{r\theta}$
ε_r	$\frac{1}{E_h}$	$-\frac{\nu_{hh}}{E_h}$	$-\frac{\nu_{vh}}{E_v}$	0	0	0
ε_θ	$-\frac{\nu_{hh}}{E_h}$	$\frac{1}{E_h}$	$-\frac{\nu_{vh}}{E_v}$	0	0	0
ε_z	$-\frac{\nu_{hv}}{E_h}$	$-\frac{\nu_{hv}}{E_h}$	$\frac{1}{E_v}$	0	0	0
$\gamma_{\theta z}$	0	0	0	$\frac{1}{G}$	0	0
γ_{zr}	0	0	0	0	$\frac{1}{G}$	0
$\gamma_{r\theta}$	0	0	0	0	0	$2\frac{1+\nu_{hh}}{E_h}$

(Le module de cisaillement dans un plan horizontal G_h vaut $\frac{E_h}{2(1+\nu_{hh})}$).

Cette matrice fait donc apparaître 6 coefficients, mais étant symétrique (matrice inverse d'une matrice symétrique) nous avons la relation :

$$\boxed{\frac{\nu_{vh}}{E_v} = \frac{\nu_{hv}}{E_h}}$$

Théorème de réciprocité de GAUSS

Les relations entre ces paramètres et les coefficients de la matrice inverse sont :

$$A = E_h \frac{1-\nu_{vh}\nu_{hv}}{(1+\nu_{hh})(1-\nu_{hh}-2\nu_{vh}\nu_{hv})} \qquad F = E_h \frac{\nu_{hh}+\nu_{vh}\nu_{hv}}{(1+\nu_{hh})(1-\nu_{hh}-2\nu_{vh}\nu_{hv})}$$

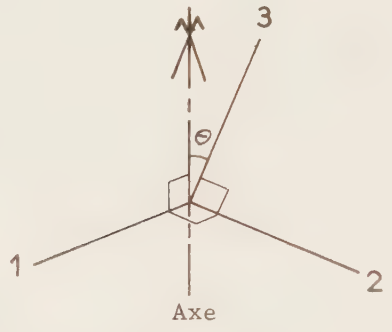
$$D = E_h \frac{\nu_{vh}}{1-\nu_{hh}-2\nu_{vh}\nu_{hv}} \qquad C = E_h \frac{\nu_{vh}(1-\nu_{hh})}{\nu_{hv}(1-\nu_{hh}-2\nu_{vh}\nu_{hv})}$$

Cas de l'isotropie

$$\begin{cases} E_{\ell} = E_{v} = E \\ \nu_{\ell\ell} = \nu_{\ell v} = \nu_{v\ell} = \nu \\ G_{v} = G_{\ell} = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = C = \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ F = D = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

b - Repère quelconque

La matrice donnant les déformations en fonction des contraintes dans le cas du repère ci-contre 1 2 3 (1'axe d'orthotropie ne coïncide plus avec 1'un des axes de référence) est présentée dans le tableau 2.1. (CORDARY [17]).



On remarque qu'une compression simple suivant 1'un quelconque des axes 1, 2 ou 3 provoque une distorsion γ_{23} c'est-à-dire une variation de l'angle droit 2 3.

2.1.2. Domaine de variation des coefficients de Poisson

Il est bien connu qu'en isotropie, le coefficient de POISSON est compris entre 0 et 0.5 (en théorie - 1 et 0.5, mais nous ne connaissons aucun corps ayant un coefficient de POISSON négatif).

De même $\nu_{\ell\ell}$, $\nu_{v\ell}$ et $\nu_{\ell v}$ doivent rester entre certaines limites dont la détermination a opposé bien des chercheurs.

• BARDEN [6] pour que les expressions des contraintes obtenues par MICHELL [68] soient valables donne la condition

$$\sqrt{\frac{\nu_{\ell v}}{\nu_{v\ell}}}\left(1 - \nu_{\ell v} - \nu_{\ell\ell}\nu_{\ell v} - \nu_{\ell v}\nu_{v\ell}\right) > \frac{2\nu_{\ell v}(1+\nu_{\ell\ell})(1-\nu_{\ell\ell} - 2\nu_{\ell v}\nu_{v\ell})}{\nu_{\ell v} + \nu_{v\ell} + 2\nu_{\ell v}\nu_{v\ell}}$$

bien que MICHELL reconnaisse "qu'il n'y a aucune raison évidente pour que cette inégalité soit satisfaite".

Tableau 2.1. Relation contraintes-déformations dans le repère défini p. 114.

	σ_1	σ_2	σ_3	τ_{23}	τ_{31}	τ_{12}
ε_1	$\frac{1}{E_h}$	$-\frac{\nu_{hh}}{E_h}\cos^2\theta - \frac{\nu_{vh}}{E_v}\sin^2\theta$	$-\frac{\nu_{hh}}{E_h}\sin^2\theta - \frac{\nu_{vh}}{E_v}\cos^2\theta$	$2\left(\frac{\nu_{vh}}{E_v} - \frac{\nu_{hh}}{E_h}\right)\sin\theta\cos\theta$	0	0
ε_2	$-\frac{\nu_{hh}}{E_h}\cos^2\theta - \frac{\nu_{vh}}{E_v}\sin^2\theta$	$\frac{1}{E_h}\cos^4\theta + \frac{1}{E_v}\sin^4\theta$ $-\frac{\nu_{vh}}{E_v}\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot 2$ $+\frac{1}{G}\cos^2\theta\sin^2\theta$	$-\frac{\nu_{vh}}{E_v}\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right)$ $+\left(\frac{1}{E_h} + \frac{1}{E_v} - \frac{1}{G}\right)\cos^2\theta\sin^2\theta$	$2\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\nu_{vh}}{E_v}\right)\cos^3\theta\sin\theta$ $-2\left(\frac{1+\nu_{vh}}{E_v}\right)\cos\theta\sin^3\theta$ $-\frac{1}{G}\sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$	0	0
ε_3	$-\frac{\nu_{hh}}{E_h}\sin^2\theta - \frac{\nu_{vh}}{E_v}\cos^2\theta$	$-\frac{\nu_{vh}}{E_v}\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right)$ $+\left(\frac{1}{E_h} + \frac{1}{E_v} - \frac{1}{G}\right)\cos^2\theta\sin^2\theta$	$\frac{1}{E_h}\sin^4\theta + \frac{1}{E_v}\cos^4\theta$ $-2\frac{\nu_{vh}}{E_v}\cos^2\theta\sin^2\theta$ $+\frac{1}{G}\sin^2\theta\cos^2\theta$	$2\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\nu_{vh}}{E_v}\right)\cos\theta\sin^3\theta$ $-2\left(\frac{1+\nu_{vh}}{E_v}\right)\cos^3\theta\sin\theta$ $+\frac{1}{G}\sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$	0	0
$\frac{\gamma_{23}}{2}$	$\left(\frac{\nu_{vh}}{E_v} - \frac{\nu_{hh}}{E_h}\right)\cos\theta\sin\theta$	$\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\nu_{vh}}{E_v}\right)\cos^3\theta\sin\theta$ $-\frac{1+\nu_{vh}}{E_v}\cos\theta\sin^3\theta$ $-\frac{1}{2G}\sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$	$\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\nu_{vh}}{E_v}\right)\cos\theta\sin^3\theta$ $-\frac{1+\nu_{vh}}{E_v}\cos^3\theta\sin\theta$ $+\frac{1}{2G}\sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$	$2\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\nu_{vh}}{E_v}\right)\cos^2\theta\sin^2\theta$ $-2\left(\frac{1+\nu_{vh}}{E_v}\right)\cos^2\theta\sin^2\theta$ $+\frac{1}{2G}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)^2$	0	0
$\frac{\gamma_{31}}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2G}\cos^2\theta + \frac{1+\nu_{hh}}{E_h}\sin^2\theta$	$\frac{1+\nu_{hh}}{E_h}\cos\theta\sin\theta$ $-\frac{1}{2G}\cos\theta\sin\theta$
$\frac{\gamma_{12}}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1+\nu_{hh}}{E_h}\cos\theta\sin\theta$ $-\frac{1}{2G}\cos\theta\sin\theta$	$\frac{1+\nu_{hh}}{E_h}\cos^2\theta - \frac{1}{2G}\sin^2\theta$

● KONING [58] puis TAN-TJONG-KIE [93] supposent que la déformation volumique est de même signe que la contrainte appliquée. Cette hypothèse est inexacte pour les sols, puisqu'on sait qu'un sable dense ou une argile fortement surconsolidée peuvent se dilater sous une compression simple.

La déformation volumique peut se mettre sous la forme :

$\varepsilon_v = a(\sigma_r + \sigma_\theta) + b\sigma_z$; ils écrivent donc que a et b sont positifs ce qui conduit à

$$\nu_{zh} + \nu_{hv} \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \nu_{vh} \leq \frac{1}{2}$$

● En émettant la même hypothèse, HOLLINGSHEAD et RAYMOND [49] arrivent à $\nu_{vh} \leq \frac{1}{2}$ mais aussi à $\nu_{zh} + \frac{E_h}{E_v} \leq 1$, ce qui est pour le moins surprenant.

● Dans un premier article, CHOWDHURY et KING [15] prétendaient que la condition

$$\begin{cases} \nu_{zh} + \nu_{hv} \leq 1 \\ \nu_{vh} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$ était nécessaire pour que la déformation volumique ait même signe que la contrainte moyenne. Après une longue discussion (PICKERING [79] et [80], URIEL [97], CHOWDHURY et KING [16]), il s'est avéré que cette proposition n'était vraie que lorsque les trois contraintes principales ont même signe. L'hypothèse de CHOWDHURY et KING est donc équivalente à celle de KONING.

● Enfin, dans une publication du Laboratoire de DELFT [61] on trouve, en outre, la condition $b - a \geq 0$, d'où

$$\nu_{hv}(1-\nu_{vh}) \geq \nu_{vh}(1-\nu_{hh})$$

Or, la seule condition qu'on puisse en réalité écrire est, comme l'a fait HEARMON, que l'énergie potentielle soit positive.

Soit $W = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$ l'énergie potentielle emmagasinée par unité de volume. En décomposant par la méthode de GAUSS cette forme quadratique, nous avons obtenu :

$$2W = \frac{1}{c}\left[D\varepsilon_r + D\varepsilon_\theta + C\varepsilon_z\right]^2 + \frac{c}{AC-D^2}\left[\left(A-\frac{D^2}{c}\right)\varepsilon_r + \left(F-\frac{D^2}{c}\right)\varepsilon_\theta\right]^2$$

$$+ \frac{(A-F)\left(A+F-\frac{2D^2}{c}\right)}{A-\frac{D^2}{c}}\left[\varepsilon_\theta\right]^2 + 9\left[\gamma_{\theta z}^2 + \gamma_{zr}^2\right] + \frac{A-F}{2}\left[\gamma_{r\theta}\right]^2$$

Cette expression sera toujours positive ou nulle si les coefficients des différentes formes linéaires indépendantes sont positifs ou nuls d'où

$$C \geqslant 0 \qquad AC - D^2 \geqslant 0 \qquad G \geqslant 0 \qquad A - F \geqslant 0 \qquad (A+F)C - D^2 \geqslant 0$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases} \nu_{hh} \leqslant 1 \\ \nu_{hv} \leqslant \sqrt{\dfrac{E_h}{E_v}} \\ 1 - \nu_{hh} - 2\nu_{hv}^2 \left(\dfrac{E_h}{E_v}\right)^{-1} \geqslant 0 \end{cases}$$

Il est apparu que la troisième inégalité était la plus restrictive.

La seule condition imposée aux coefficients de POISSON est donc qu'ils satisfassent l'inégalité :

$$\boxed{2\nu_{hv}^2 - (1-\nu_{hh})\frac{E_h}{E_v} \leqslant 0}$$

Dans l'espace $\left(\nu_{hh}, \nu_{hv}, \dfrac{E_h}{E_v}\right)$ ils peuvent décrire un volume limité par les plans $\nu_{hv} = 0$ et $\nu_{hh} = 0$ et par un paraboloïde d'équation $2\nu_{hv}^2 - (1-\nu_{hh})\dfrac{E_h}{E_v} = 0$ (figure 2.1.).

Nous avons constaté que ce résultat avait déjà été trouvé par PICKERING [78].

Ce paraboïde est engendré par des droites issues du point

$$\left(\nu_{hh} = 1,\ \nu_{hv} = 0,\ \frac{E_h}{E_v} = 0\right)$$

Incompressibilité

La déformation volumique sous pression isotrope vaut, par ailleurs, $\varepsilon_v = \dfrac{P}{E_h}\left(2 - 2\nu_{hh} - 4\nu_{hv} + \dfrac{E_h}{E_v}\right)$. La condition d'incompressibilité sous pression isotrope s'écrit alors :

$$2 - 2\nu_{hh} - 4\nu_{hv} + \frac{E_h}{E_v} = 0$$

Cette équation est celle d'un plan tangent au paraboloïde (évidemment le long d'une droite, que nous avons représentée sur la figure 2.1.).

Les équations de cette droite sont :

$$\boxed{\begin{cases} \nu_{hh} = 1 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{E_h}{E_v} \\ \nu_{hv} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{E_h}{E_v} \end{cases} \iff \text{incompressibilité sous pression isotrope}}$$

Il est à noter qu'alors $\nu_{vh} = 0.5$

D'autre part, le coefficient ν_{hh} étant positif, nous en déduisons le résultat important suivant :

> Un corps aelotrope tel que $\frac{E_h}{E_v} > 2$ ne peut pas être incompressible sous pression isotrope.

Nous avons représenté sur les figures 2.2. et 2.3. les intersections de la surface limite de la figure 2.1. respectivement par les plans $\frac{E_h}{E_v} = 3$ et $\frac{E_h}{E_v} = 1$

2.1.3. Valeurs les plus probables de $\frac{E_h}{E_v}$ dans les sols naturels

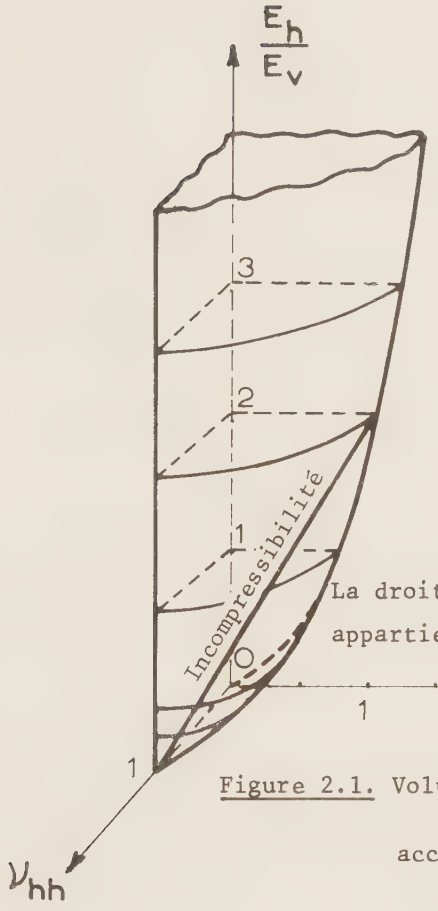
a) Sables

Les mesures directes de module sur des échantillons représentant un sable réel (remplissage vertical, contrainte principale majeure verticale) ou sur des sols non remaniés conduisent à des rapports $\frac{E_h}{E_v}$ compris entre 0.4 et 1 (§ 1.2.3.b.). Les essais de compression isotrope effectués par WIENDIECK lui permettent de situer également entre 0.4 et 1 l'anisotropie des sables étudiés. La figure 2.4. reproduit la relation empirique qu'il a obtenu entre $\frac{E_h}{E_v}$ et la densité ; on constate encore que plus un sable est dense, moins il est anisotrope.

b) Argiles

Dans les argiles normalement consolidées ou légèrement surconsolidées, $\frac{E_h}{E_v}$ semble être tantôt supérieur, tantôt inférieur à 1. La consolidation verticale (anisotrope) a sans doute réorienté les particules horizontalement (§ 1.2.3.a.) mais l'influence de la structure initiale déterminée par le mode de dépôt ainsi que les changements de structure dus à des phénomènes physico-chimiques peuvent encore se faire sentir.

Par contre, l'état de contrainte très anisotrope qui règne dans les argiles fortement surconsolidées est peut être la cause principale de leur anisotropie de module, même si l'orientation préférentielle existant avant disparition des couches supérieures a été peu altérée. Le rapport K_o entre les contraintes horizontales et verticales peut, en effet, atteindre 3 et plus (D'APPOLONIA et LAMBE [20], CAQUOT [14], BISHOP [10], SKEMPTON [91]). Il serait très intéressant de relier $\frac{E_h}{E_v}$ au degré de surconsolidation, comme on l'a fait pour K_o (CAQUOT p 112, D'APPOLONIA p 529).



La droite représentant l'incompressibilité appartient à la surface limite.

Figure 2.1. Volume de l'espace $\left(\nu_{hh}, \nu_{hv}, \frac{E_h}{E_v}\right)$ accessible aux coefficients de POISSON.

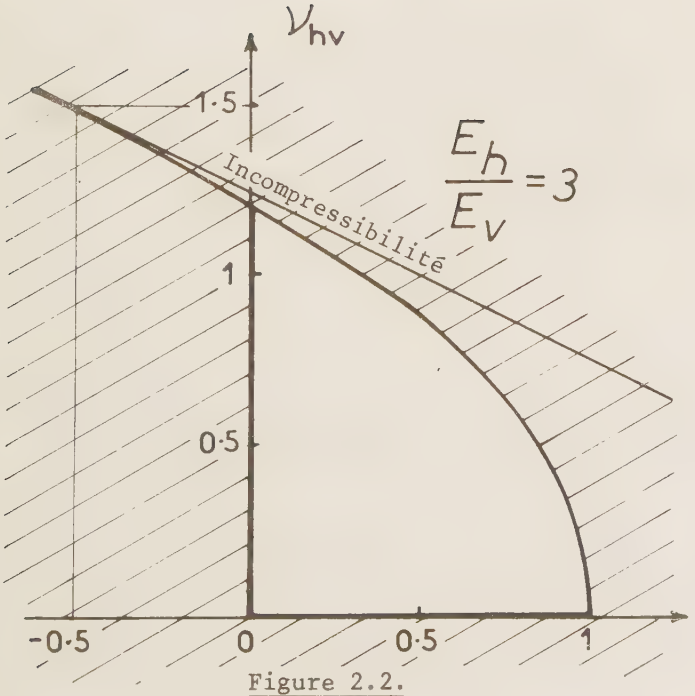


Figure 2.2.

Intersection avec le plan $\frac{E_h}{E_v} = 3$

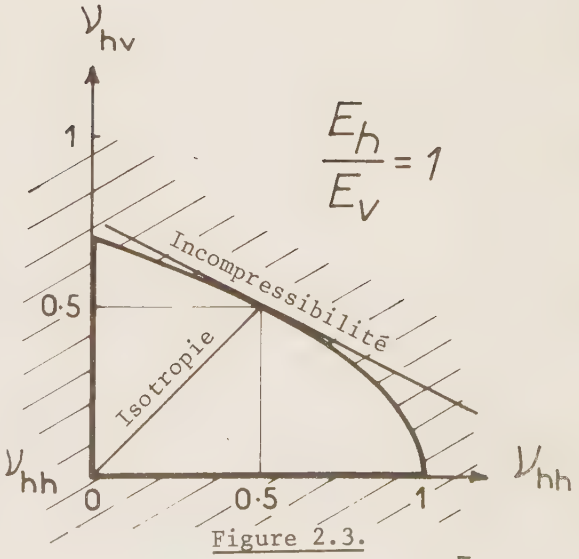


Figure 2.3.

Intersection avec le plan $\frac{E_h}{E_v} = 1$

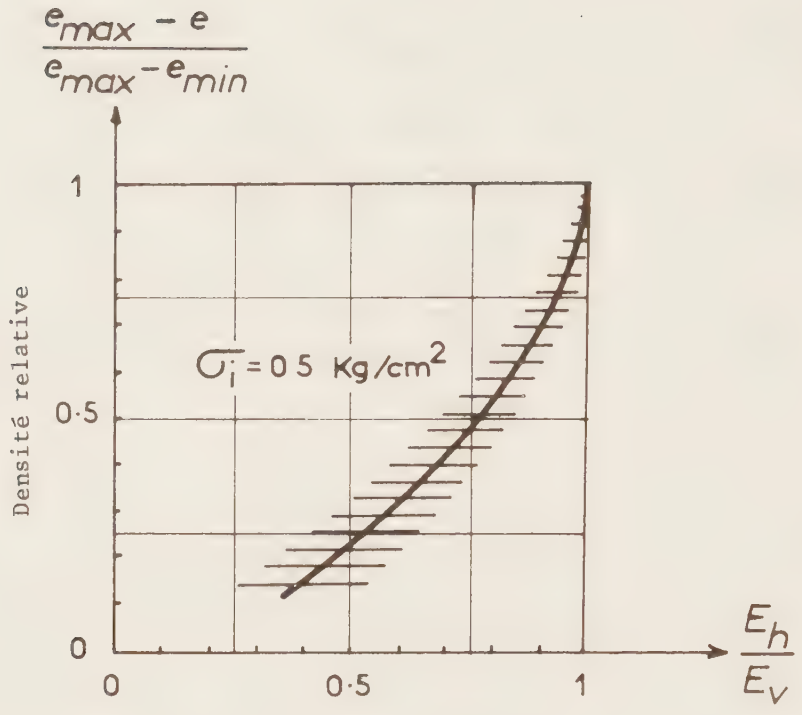


Figure 2.4. Relation empirique proposée par WIENDIECK.
Rapport $\frac{E_h}{E_v}$ dans un sable en fonction de sa densité relative.

Tableau 2.5.

Valeurs usuelles de $\frac{E_h}{E_v}$ dans les sols naturels.

Sables	$0.4 < \frac{E_h}{E_v} < 1$
Argiles normalement consolidées	$\frac{E_h}{E_v}$ autour de 1
Argiles très surconsolidées	$1 < \frac{E_h}{E_v} < 3$

Les essais de WARD, SAMUELS et BUTLER [98] sur des échantillons non remaniés d'argile de Londres très surconsolidée prélevés dans différents sites montrent que dans tous les cas $\frac{E_h}{E_v}$ est supérieur à 1 et qu'en général $1.5 < \frac{E_h}{E_v} < 2$.

Selon TAN-TJONG-KIE, un grand nombre de dépôts naturels d'argiles sont fortement anisotropes et $\frac{E_h}{E_v}$ peut atteindre 3

GERRARD [34] propose :

$\frac{E_h}{E_v} = 1.5$ pour une argile surconsolidée

$\frac{E_h}{E_v} = 3$ pour une argile très surconsolidée.

Notons, enfin, que BOEHLER a obtenu $\frac{E_h}{E_v} = 2.23$ dans une argile consolidée verticalement sous 8 bars.

Nous avons résumé dans le tableau 2.5. les valeurs probables de $\frac{E_h}{E_v}$ dans les sols naturels.

Connaissant ainsi le domaine de variation des coefficients de POISSON ainsi que les valeurs possibles de $\frac{E_h}{E_v}$ dans les sols, nous avons entrepris une étude systématique de l'influence de chacun des paramètres de l'aelotropie sur les tassements et contraintes ; nous avons d'abord pour cela cherché les expressions de ces tassements et contraintes sous certaines charges de révolution.

2.2. Méthode de calcul sous chargement de révolution

2.2.1. Equations de BELTRAMI-MICHELL

Nous supposerons que l'axe d'orthotropie est dirigé suivant oz.

u, v, w sont les déplacements suivant les axes r , θ et z. Dans le problème présent, de révolution autour de oz, v est nul et u et w sont indépendants de θ .

● Déformations

Elles s'expriment dans ces conditions en fonction des déplacements par

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (2.1.)$$

$$\gamma_{\theta z} = \gamma_{r\theta} = 0 \qquad \gamma_{zr} = 2\varepsilon_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

● Contraintes

Le chargement étant de révolution autour de oz, $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{\theta z}$ sont nulles ; il reste :

$$\begin{cases} \sigma_r = A\varepsilon_r + F\varepsilon_\theta + D\varepsilon_z \\ \sigma_\theta = F\varepsilon_r + A\varepsilon_\theta + D\varepsilon_z \\ \sigma_z = D\varepsilon_r + D\varepsilon_\theta + C\varepsilon_z \\ \tau_{zr} = G\gamma_{zr} \end{cases} \qquad (2.2.)$$

● Equations d'équilibre

Elles s'écrivent ici, pour un matériau non pesant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{zr}}{r} = 0 \end{cases} \qquad (2.3.)$$

● Equations de BELTRAMI-MICHEL

On peut exprimer les contraintes en fonction des déplacements et reporter leurs valeurs dans les équations d'équilibre. Les équations différentielles obtenues sont :

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(ru)\right] + G\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (D+G)\dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0 \\ (G+D)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial u}{\partial z}\right] + G\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right] + C\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \qquad (2.4.)$$

où u et w sont des fonctions de r et z.

2.2.2. Résolution

Il nous faut trouver deux fonctions u (r, z) et w (r, z) satisfaisant les conditions aux limites et les équations précédentes.

La méthode (GERRARD) consiste à chercher une solution dépendante d'un paramètre ξ sous la forme :

$$\begin{cases} U = J_1(\xi r)\, h_\xi(z) \\ W = J_0(\xi r)\, g_\xi(z) \end{cases} \qquad (2.5.)$$

J_0 et J_1 sont les fonctions de BESSEL du 1er et 2e ordre.

La solution générale sera alors :

$$u = \int_0^\infty U \, d\xi \qquad\qquad w = \int_0^\infty W \, d\xi$$

Nous simplifierons par la suite l'écriture en remplaçant $h_\xi(z)$ par $h(z)$ et $g_\xi(z)$ par $g(z)$, sachant que les fonctions h et g dépendent de ξ.

En reportant les expressions proposées pour U et W dans les équations de BELTRAMI-MICHELL, on obtient finalement :

$$\begin{cases} A\xi^2 h(z) - G h''(z) + (D+G)\xi g'(z) = 0 \\ -G\xi^2 g(z) + C g''(z) + (D+G)\xi h'(z) = 0 \end{cases} \qquad (2.6.)$$

ce qui, en éliminant h (z), conduit à :

$$g^{(4)}(z) - g''(z)\,\xi^2 \frac{AC - 2DG - D^2}{CG} + \frac{A}{C}\xi^4 g(z) = 0$$

Notons qu'en éliminant g (z), nous aurions obtenu la même équation différentielle en h (z).

Equation caractéristique $\qquad \lambda^4 - \lambda^2 \xi^2 \frac{AC - 2DG - D^2}{CG} + \frac{A}{C}\xi^4 = 0$

Elle est du second degré en λ^2 et son discriminant vaut :

$$\Delta = \xi^4 \left[\left(\frac{AC - 2DG - D^2}{CG} \right)^2 - 4\frac{A}{C} \right]$$

$$\Delta = \xi^4 \left(\frac{AC - 2DG - D^2 + 2G\sqrt{AC}}{CG} \right) \left(\frac{AC - 2DG - D^2 - 2G\sqrt{AC}}{CG} \right)$$

Appelons $4\alpha^2$ et $4\beta^2$ respectivement les expressions contenues dans la première et la seconde parenthèse. D'après les limites imposées aux coefficients de POISSON (§ 2.1.2.) les constantes A, C, D, F et G sont toutes positives et $AC-D^2$ est positif.

$$\left\{\begin{array}{l} AC - D^2 \geqslant 0 \\ A, C \text{ et } D \geqslant 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \sqrt{AC} - D \geqslant 0$$

- α^2 peut s'écrire $\dfrac{AC - D^2 + 2G(\sqrt{AC} - D)}{4CG}$

  α^2 est donc toujours positif ou nul

- β^2 peut s'écrire $\dfrac{\sqrt{AC} + D}{4C}\left(\dfrac{\sqrt{AC} - D}{G} - 2\right)$

Δ est donc du signe de $\dfrac{\sqrt{AC} - D}{G} - 2$ et suivant que G est inférieur ou supérieur à une valeur G_o , Δ sera positif ou négatif.

$$\boxed{G_o = \frac{1}{2}\left(\sqrt{AC} - D\right)} \qquad (2.7.)$$

N.B. Certains auteurs (KONING, MICHELL, HOLLINGSHEAD) ont pris cette valeur G_o comme limite supérieure à G. D'après HOLLINGSHEAD et RAYMOND ([49] et [50]) par exemple, cette condition $G < G_o$ est nécessaire pour que les contraintes verticales soient réelles, ce qui est tout à fait faux. D'autres, comme TAN-TJONG-KIE ont supposé G égal à G_o, ce qui est purement arbitraire, car la position de G par rapport à G_o n'entraîne qu'un changement formel des expressions des déplacements et contraintes.

Racines de l'équation caractéristique

1. $G < G_o$ Δ est positif, les 4 racines en λ sont réelles et valent $\xi(\pm\alpha \pm \beta)$. La solution est alors :

$$g(\zeta) = A_1 e^{(-\alpha+\beta)\xi\zeta} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)\xi\zeta} + A_3 e^{(\alpha+\beta)\xi\zeta} + A_4 e^{(\alpha-\beta)\xi\zeta} \qquad (2.8.)$$

2. $G = G_o$

Il existe deux racines doubles en λ : $-\alpha\xi$ et $+\alpha\xi$

D'où :

$$g(\zeta) = B_1 e^{-\alpha\xi\zeta} + B_2 \zeta e^{-\alpha\xi\zeta} + B_3 e^{\alpha\xi\zeta} + B_4 \zeta e^{\alpha\xi\zeta} \qquad (2.9.)$$

3. $G > G_o$ Les racines en λ sont imaginaires et valent $\xi(\pm\alpha \pm i\beta)$

$$g(\xi) = C_1 e^{(-\alpha+i\beta)\xi z} + C_2 e^{(-\alpha-i\beta)\xi z} + C_3 e^{(\alpha+i\beta)\xi z} + C_4 e^{(\alpha-i\beta)\xi z} \qquad (2.10.)$$

Cas de l'isotropie

Nous avons vu qu'alors (§ 2.1.1.)

$$\left|\begin{array}{l} A = C = \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ F = D = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{array}\right.$$

Ces valeurs conduisent à $\alpha^2 = 1$ et $G = G_o$ $(= \frac{E}{2(1+\nu)})$.

En isotropie, le module de cisaillement est égal à la valeur G_o définie précédemment. Les expressions des déplacements, déformations et contraintes seront du type 2.

2.2.3. Conditions aux limites

Les fonctions inconnues g (z) et h (z) dépendent de 4 constantes qui sont déterminées par les conditions aux limites.

- Massif semi-infini

Si p (r) et t (r) sont les fonctions de répartition des composantes normales et tangentielles de la charge, les 4 équations sont :

$$\left|\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \sigma_z = p\ (r) \\ \tau_{zr} = t\ (r) \end{array}\right\} & \text{pour } z = 0 \\ \left.\begin{array}{l} u = 0 \\ w = 0 \end{array}\right\} & \text{pour } z \longrightarrow \infty \end{array}\right.$$

- Multicouche

Il faut déterminer les 4 constantes pour chacune des n couches ; les 4 × n équations sont :

. 2 équations de conditions aux limites en surface (cf ci-dessus, z = 0)

. 4 équations pour chacun des n - 1 interfaces (continuité des contraintes et déplacements)

$$\left|\begin{array}{ll} \sigma_z^i = \sigma_z^{i+1} & u_i = u_{i+1} \\ \tau_{zr}^i = \tau_{zr}^{i+1} & w_i = w_{i+1} \end{array}\right.$$

. 2 équations à la base de la dernière couche

$$\left|\begin{array}{ll} w = 0 & \text{substratum rigide} \\ \tau_{zr} = 0 & \text{ou } u = 0 \text{ suivant que le contact est glissant ou rugueux.} \end{array}\right.$$

a - Transformation de HANKEL

Outre les calculs eux-mêmes, parfois assez longs, la principale difficulté de la méthode consiste à exprimer les conditions aux limites.

Comme on recherche, en effet, u (r,z) et w (r,z) sous la forme

$\int_0^\infty J_i(\xi r)\, \phi(z,\xi)\, d\xi$ les contraintes auront des expressions semblables.

Il faut donc pouvoir écrire les fonctions de répartitions des contraintes imposées en surface (z = 0) par la charge, sous la forme :

$$p(r) = \int_0^\infty J_i(\xi r)\, \phi_1(\xi)\, d\xi \qquad \text{(composante normale)}$$

$$t(r) = \int_0^\infty J_i(\xi r)\, \phi_2(\xi)\, d\xi \qquad \text{(composante tangentielle)}$$

(La charge étant de révolution, elles ne dépendent que de r).

On utilise pour cela les transformées de HANKEL (ou intégrales de FOURIER-BESSEL) des fonctions de répartitions et les transformations réciproques.

Soit une fonction f(r) possédant les propriétés suivantes (LEHKNITSKII p. 373) ;

- f(r) est finie $\forall r$;

- Sur un intervalle quelconque de $r > 0$, le nombre de points de discontinuité et le nombre de maxima et minima de f(r) est fini.

- L'intégrale $\int_0^\infty f(r)\sqrt{r}\,dr$ est absolument convergente, ce qui signifie dans le cas où f(r) est une répartition de contrainte, que la résultante est finie ou nulle.

Alors, la transformée de HANKEL d'ordre k existe et vaut :

$$\overline{F}_k(\xi) = \int_0^\infty r\, f(r)\, J_k(\xi r)\, dr$$

La transformation étant involutive, la fonction f(r) pourra à son tour être exprimée comme transformée de HANKEL de $\overline{F}_k(\xi)$ d'où :

$$f(r) = \int_0^\infty \xi\, \overline{F}_k(\xi)\, J_k(\xi r)\, d\xi$$

Ce procédé permet donc de mettre les fonctions de répartition sous la forme voulue. Nous verrons que c'est la transformée d'ordre 0 qui convient pour p(r), et 1 pour t(r) d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} p(r) &= \int_0^\infty \xi\, \overline{P}_0(\xi)\, J_0(\xi r)\, d\xi \\ t(r) &= \int_0^\infty \xi\, \overline{T}_1(\xi)\, J_1(\xi r)\, d\xi \end{aligned}} \qquad (2.11.)$$

$\overline{P}_0(\xi)$ et $\overline{T}_1(\xi)$ sont les transformées de HANKEL d'ordre 0 de p(r) et d'ordre 1 de t(r).

● Charge normale p uniformément répartie sur un cercle de rayon R

$$\left\{\begin{array}{l} p(r) = \left\{\begin{array}{l} p \text{ si } 0 \leq r \leq R \\ 0 \text{ si } r > R \end{array}\right. \\ t(r) = 0 \quad \forall\, r \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\overline{P}_0(\xi) = \int_0^\infty r\, p(r)\, J_0(\xi r)\, dr = \frac{pR}{\xi}\, J_1(\xi r)$$

$$\overline{T}_1(\xi) = \int_0^\infty r\, t(r)\, J_1(\xi r)\, dr = 0$$

$$\overline{P}_0(\xi) = \frac{pR}{\xi} J_1(\xi r)$$
$$\overline{T}_1(\xi) = 0$$

(2.12.)

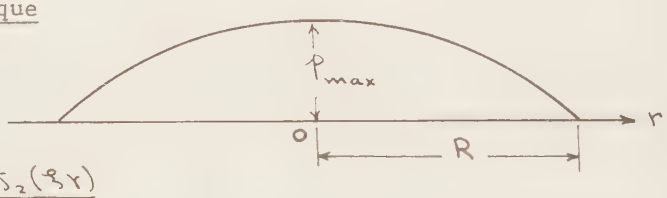
● Charge concentrée normale P

En faisant tendre R vers 0 dans le résultat précédent, on montre facilement que $\overline{P}_0(\xi)$ tend vers $\frac{P}{2\pi}$ qui est la transformée de HANKEL d'ordre 0 de la distribution de DIRAC correspondant à la charge concentrée P. D'où

$$\overline{P}_0(\xi) = \frac{P}{2\pi}$$
$$\overline{T}_1(\xi) = 0$$

(2.13.)

● Charge normale à distribution parabolique sur un cercle



On trouve alors :

$$\overline{P}_0(\xi) = 2\, p_{max}\, \frac{J_2(\xi r)}{\xi^2}$$
$$\overline{T}_1(\xi) = 0$$

(2.14.)

b - Expression des conditions aux limites en surface

D'après les relations 2.1. (§ 2.2.1.), σ_z et τ_{zr} valent :

$$\sigma_z = D\frac{\partial u}{\partial r} + D\frac{u}{r} + C\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \tau_{zr} = G\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

d'où avec les expressions 2.5. proposées pour u et w (§ 2.2.2.) et compte tenu des relations rappelées en annexe sur les fonctions de BESSEL :

$$\begin{cases} \sigma_z = D\int_0^\infty \xi\, h(z)\, J_0(\xi r)\, d\xi + C\int_0^\infty g'(z)\, J_0(\xi r)\, d\xi \\ \tau_{zr} = G\int_0^\infty \left[h'(z) - \xi\, g(z)\right] J_1(\xi r)\, d\xi \end{cases}$$

Les conditions aux limites en surface s'obtiennent en identifiant, pour z = 0, ces valeurs à celles calculées au § 2.2.3.a., ce qui conduit à :

$$\boxed{\begin{aligned} D\,\xi\, h(0) + C\, g'(0) &= \xi\, \overline{P}_0(\xi) \\ h'(0) - \xi\, g(0) &= \xi\, \overline{T}_1(\xi) \end{aligned}}$$

(2.15.)

2.2.4. Cas du massif semi-infini

Nous n'envisagerons que des charges normales : t(r) = 0.

ⓐ $G < G_o = \frac{1}{2} \pi (\sqrt{AC} - D)$

g (z) a pour expression (§ 2.2.2.) :

$$g(z) = A_1 e^{(-\alpha+\beta)\xi z} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)\xi z} + A_3 e^{(\alpha+\beta)\xi z} + A_4 e^{(\alpha-\beta)\xi z}$$

Le système d'équations 2.6. permet de calculer h (z).

$$h(z) = q_1 A_1 e^{(-\alpha+\beta)\xi z} + q_2 A_2 e^{(-\alpha-\beta)\xi z} - q_2 A_3 e^{(\alpha+\beta)\xi z} - q_1 A_4 e^{(\alpha-\beta)\xi z} \quad \text{avec}$$

$$q_1 = \frac{G - C(-\alpha+\beta)^2}{(D+G)(-\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{G - C(\alpha+\beta)^2}{(D+G)(-\alpha-\beta)}$$

A_1, A_2, A_3 et A_4 sont déterminées par les conditions aux limites.

- Pour $z \to \infty$ $\quad u \longrightarrow 0$ et $w \longrightarrow 0$

Or α, β et $\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{\frac{A}{C}}$ sont positifs ;

$\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ le sont aussi et A_3 et A_4 doivent être nuls.

- Pour z = 0 elles s'écrivent (2.15.)

$$\begin{cases} D\xi h(0) + C g'(0) = \xi \bar{P}_o(\xi) \\ h'(0) - \xi g(0) = \xi \bar{T}_1(\xi) = 0 \quad (T(r)=0) \end{cases}$$

d'où, tous calculs faits :

$$A_1 = \bar{P}_o(\xi) \sqrt{\frac{A}{C}} \frac{D + C(\alpha+\beta)^2}{2\beta(D^2 - AC)} \qquad A_3 = 0$$

$$A_2 = -\bar{P}_o(\xi) \sqrt{\frac{A}{C}} \frac{D + C(\alpha-\beta)^2}{2\beta(D^2 - AC)} \qquad A_4 = 0$$

ⓑ $G = G_o = \frac{1}{2}\left(\sqrt{AC} - D\right)$

Le principe du calcul est le même qu'en ⓐ , et nous ne donnons que les principaux résultats :

$$g(\zeta) = B_1 e^{-\alpha\xi\zeta} + B_2 \zeta e^{-\alpha\xi\zeta} + B_3 e^{\alpha\xi\zeta} + B_4 \zeta e^{\alpha\xi\zeta}$$

La relation 2.6. donne alors :

$$h(\zeta) = (B_1 n_1 - B_2 n_2) e^{-\alpha\xi\zeta} + B_2 n_1 \zeta e^{-\alpha\xi\zeta}$$

$$-(B_3 n_1 + B_4 n_2) e^{\alpha\xi\zeta} - B_4 n_1 \zeta e^{\alpha\xi\zeta} \qquad \text{avec}$$

$$n_1 = \frac{C\alpha^2 - G}{\alpha(D+G)} \qquad \text{et} \qquad n_2 = \frac{C\alpha^2 + G}{\alpha^2(D+G)\xi}$$

Les conditions aux limites conduisent à :

$$B_1 = -\frac{2C\alpha^3}{G} \cdot \frac{D+G}{(D+C\alpha^2)^2} \cdot \bar{P}_o(\xi) \qquad B_3 = 0$$

$$B_2 = -\frac{\alpha^2}{G} \cdot \frac{D+G}{D+C\alpha^2} \cdot \xi \bar{P}_o(\xi) \qquad B_4 = 0$$

ⓒ $G > G_o = \frac{1}{2}\left(\sqrt{AC} - D\right)$

L'expression (2.10.) de g (z) peut encore s'écrire :

$$g(\zeta) = e^{-\alpha\xi\zeta}\left(Q_1 \cos\beta\xi\zeta + Q_2 \sin\beta\xi\zeta\right) + e^{\alpha\xi\zeta}\left(Q_3 \cos\beta\xi\zeta + Q_4 \sin\beta\xi\zeta\right)$$

d'où avec (2.6.) :

$$h(\zeta) = e^{-\alpha\xi\zeta}\left[(m_1 Q_1 - m_2 Q_2)\cos\beta\xi\zeta + (m_2 Q_1 + m_1 Q_2)\sin\beta\xi\zeta\right] + e^{\alpha\xi\zeta}\left[(-m_1 Q_3 - m_2 Q_4)\cos\beta\xi\zeta + (m_2 Q_4 - m_1 Q_3)\sin\beta\xi\zeta\right]$$

où $m_1 = \frac{\sqrt{\frac{A}{C}}}{D+G} \alpha \left(\sqrt{AC} - G\right)$

$m_2 = \frac{\sqrt{\frac{A}{C}}}{D+G} \beta \left(\sqrt{AC} + G\right)$

Les conditions aux limites donnent :

$Q_1 = 2\alpha \frac{\sqrt{AC}}{D^2 - AC} \overline{P}_o(\xi)$ $\qquad$ $Q_3 = 0$

$Q_2 = -\frac{\sqrt{\frac{A}{C}}}{2G\beta} \overline{P}_o(\xi)$ $\qquad$ $Q_4 = 0$

Nous avons rassemblé dans le tableau 2.6. toutes les expressions de g (z) et h (z) dans le cas étudié du massif semi-infini soumis à un chargement normal de révolution.

2.3. Massif semi-infini sous différentes charges

2.3.1. Charge concentrée normale P

La transformée de HANKEL de la fonction de répartition vaut dans ce cas (§ 2.2.3.a.) :

$$\overline{P}_o(\xi) = \frac{P}{2\pi}$$

Les expressions des fonctions g(z) et h (z) obtenues précédemment (§ 2.2.4.) conduisent, compte tenu des relations :

$$u = \int_0^\infty J_1(\xi r)\, g_h(z)\, d\xi$$

$$w = \int_0^\infty J_0(\xi r)\, g_g(z)\, d\xi$$

aux résultats suivants qui seront rassemblés dans les tableaux 2.7. et 2.8.

Tableau 2.6. Massif semi-infini aelotrope sous chargement normal de révolution. Expression des fonctions g (z) et h (z).

$$\begin{cases} w(r,z) = \int_0^\infty J_0(\xi r)\, g(z)\, d\xi \\ u(r,z) = \int_0^\infty J_1(\xi r)\, h(z)\, d\xi \end{cases}$$

q	$g(z)$	$h(z)$	Valeurs des coefficients.
$q < \frac{1}{2}(\sqrt{AC} - D)$	$\overline{P}_o(\xi)\left[a_1 e^{(-\alpha+\beta)\xi z} + a_2 e^{(-\alpha-\beta)\xi z}\right]$	$\overline{P}_o(\xi)\left[a_1 q_1 e^{(-\alpha+\beta)\xi z} + a_2 q_2 e^{(-\alpha-\beta)\xi z}\right]$	$a_1 = \sqrt{\frac{A}{C}}\frac{D+C(\alpha+\beta)^2}{2\beta(D^2-AC)}$ $\quad q_1 = \frac{q-C(\alpha-\beta)^2}{(D+q)(-\alpha+\beta)}$ $a_2 = -\sqrt{\frac{A}{C}}\frac{D+C(\alpha-\beta)^2}{2\beta(D^2-AC)}$ $\quad q_2 = \frac{q-C(\alpha+\beta)^2}{(D+q)(-\alpha-\beta)}$
$q = \frac{1}{2}(\sqrt{AC} - D)$	$\overline{P}_o(\xi) e^{-\alpha\xi z}(b_1 + b_2 \xi z)$	$\overline{P}_o(\xi) e^{-\alpha\xi z}(b'_1 + b'_2 \xi z)$	$b_1 = -\frac{2C\alpha^3}{q}\frac{D+q}{(D+C\alpha^2)^2}$ $\quad b'_1 = \frac{C\alpha^2(3q+D-C\alpha^2)+qD}{q(D+C\alpha^2)}$ $b_2 = -\frac{\alpha^2}{q}\frac{D+q}{D+C\alpha^2}$ $\quad b'_2 = -\frac{\alpha(C\alpha^2-q)}{q(D+C\alpha^2)}$
$q > \frac{1}{2}(\sqrt{AC} - D)$	$\overline{P}_o(\xi) e^{-\alpha\xi z}(c_1 \cos\beta\xi z + c_2 \sin\beta\xi z)$	$\overline{P}_o(\xi) e^{-\alpha\xi z}(c'_1 \cos\beta\xi z + c'_2 \sin\beta\xi z)$	$c_1 = 2\alpha\frac{\sqrt{AC}}{D^2-AC}$ $\quad c'_1 = \frac{1}{\sqrt{AC}+D}$ $c_2 = -\frac{\sqrt{\frac{A}{C}}}{2q\beta}$ $\quad c'_2 = -\frac{\alpha}{\beta(\sqrt{AC}-D)}$

$\overline{P}_o(\xi)$ est la transformée de HANKEL de la fonction de répartition.

- Charge concentrée P : $\overline{P}_o(\xi) = \frac{P}{2\pi}$
- Charge uniformément répartie p sur un cercle : $\overline{P}_o(\xi) = \frac{pR\,J_1(\xi R)}{\xi}$

$$\alpha = \sqrt{\frac{AC - 2Dq - D^2 + 2q\sqrt{AC}}{4Cq}}$$

$$\beta = \sqrt{\left|\frac{AC - 2Dq - D^2 - 2q\sqrt{AC}}{4Cq}\right|}$$

Dans le cas $G = G_o$, β est nul et α^2 vaut $\sqrt{\frac{A}{C}}$

a - G $<$ G$_o$

$$w(r,z) = \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\xi r)\left[a_1 e^{(-\alpha+\beta)\xi z} + a_2 e^{(-\alpha-\beta)\xi z}\right]d\xi$$

$$u(r,z) = \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty J_1(\xi r)\left[a_1 q_1 e^{(-\alpha+\beta)\xi z} + a_2 q_2 e^{(-\alpha-\beta)\xi z}\right]d\xi$$

Avec les notations définies en annexe sur les intégrales de fonctions de BESSEL, les déplacements s'écrivent :

$$w\ (r,\ z) = \frac{P}{2\pi} a_1 I_{oo}[r,(\alpha-\beta)z] + \frac{P}{2\pi} a_2 I_{oo}[r,(\alpha+\beta)z]$$

$$u\ (r,\ z) = \frac{P}{2\pi} q_1 a_1 I_{1o}[r,(\alpha-\beta)z] + \frac{P}{2\pi} q_2 a_2 I_{1o}[r,(\alpha+\beta)z]$$

On peut, avec $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$, $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ et $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$, en déduire les déformations ; d'où, tous calculs faits :

$$\varepsilon_\theta(r,z) = \frac{P}{2\pi r} q_1 a_1 I_{1o}[r,(\alpha-\beta)z] + \frac{P}{2\pi r} q_2 a_2 I_{1o}[r,(\alpha+\beta)z]$$

$$\varepsilon_r(r,z) = \frac{P}{2\pi r} q_1 a_1 \left\{ r I_{o1}[r,(\alpha-\beta)z] - I_{1o}[r,(\alpha-\beta)z] \right\}$$

$$+ \frac{P}{2\pi r} q_2 a_2 \left\{ r I_{o1}[r,(\alpha+\beta)z] - I_{1o}[r,(\alpha+\beta)z] \right\}$$

$$\varepsilon_z(r,z) = -\frac{P}{2\pi} a_1(\alpha-\beta) I_{o1}[r,(\alpha-\beta)z] - \frac{P}{2\pi} a_2(\alpha+\beta) I_{o1}[r,(\alpha+\beta)z]$$

avec $$I_{ij}[r, \psi_3] = \int_0^\infty J_i(\xi r)\, \xi^j\, e^{-\psi \xi_3}\, d\xi$$

N.B. : Les expressions des coefficients se trouvent dans le tableau 2.8.

MICHEL puis KONING, qui n'ont traité que ce cas $G < G_o$, ont donné certains résultats ; nous avons vérifié que nous retrouvons bien le tassement calculé par MICHELL :

$$w\,(r, 0) = \frac{P}{2\pi r}\sqrt{\frac{A}{G}}\,\frac{\sqrt{AC - D^2 + 2G(\sqrt{AC} - D)}}{D^2 - AC}$$

Nous avons également vérifié que les expressions de KONING des déplacements w et u et des contraintes σ_z, σ_θ et σ_r conduisent aux mêmes valeurs que les nôtres. En particulier, σ_z s'écrit :

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi z^2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{A}{C}}}{2\beta}\left\{\frac{1}{\left[\frac{r^2}{z^2} + (\alpha-\beta)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[\frac{r^2}{z^2} + (\alpha+\beta)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

LEKNITSKII (p. 379) a, d'autre part, traité le cas $G < G_o$ par la méthode de la fonction de contrainte et nous retrouvons les valeurs qu'il a donné pour σ_z, σ_θ et σ_r.

b - G = G_o

Nous obtenons dans ce cas :

$$w\,(r,z) = \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\xi r)\, e^{-\alpha \xi z}\left(b_1 + b_2 \xi z\right) d\xi$$

$$u\,(r,z) = \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty J_1(\xi r)\, e^{-\alpha \xi z}\left(b'_1 + b'_2 \xi z\right) d\xi$$

D'où :

$$w(r,z) = \frac{P}{2\pi} b_1 I_{00}(r,\alpha z) + \frac{P}{2\pi} b_2 z I_{01}(r,\alpha z)$$

$$u(r,z) = \frac{P}{2\pi} b'_1 I_{10}(r,\alpha z) + \frac{P}{2\pi} b'_2 z I_{11}(r,\alpha z)$$

$$\varepsilon_\theta(r,z) = \frac{P}{2\pi r} b'_1 I_{10}(r,\alpha z) + \frac{P}{2\pi r} b'_2 z I_{11}(r,\alpha z)$$

$$\varepsilon_r(r,z) = \frac{P}{2\pi r} b'_1 \left\{ r I_{01}(r,\alpha z) - I_{10}(r,\alpha z) \right\}$$

$$+ \frac{P}{2\pi r} b'_2 z \left\{ r I_{02}(r,\alpha z) - I_{11}(r,\alpha z) \right\}$$

$$\varepsilon_z(r,z) = -\frac{P}{2\pi} b_1 \alpha I_{01}(r,\alpha z) - \frac{P}{2\pi} b_2 \left\{ \alpha z I_{02}(r,\alpha z) - I_{01}(r,\alpha z) \right\}$$

Isotropie

Nous avons vu que l'isotropie est un cas particulier du cas $G = G_o$ (§ 2.2.2.) avec, en outre :

$$A = C = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad F = D = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

ou encore

$$E_h = E_v \qquad \nu_{hv} = \nu_{vh}$$

Nous avons vérifié que les expressions ci-dessus conduisaient aux valeurs bien connues obtenues par BOUSSINESQ et CERRUTI (cf GIROUD [39] et [40]).

$c - G > G_0$

Les expressions des déplacements et déformations sont :

$$w(r,z) = \frac{P}{2\pi} c_1 C_{00}(r,\alpha z,\beta z) + \frac{P}{2\pi} c_2 S_{00}(r,\alpha z,\beta z)$$

$$u(r,z) = \frac{P}{2\pi} c'_1 C_{10}(r,\alpha z,\beta z) + \frac{P}{2\pi} c'_2 S_{10}(r,\alpha z,\beta z)$$

$$\varepsilon_\theta(r,z) = \frac{P}{2\pi r} c'_1 C_{10}(r,\alpha z,\beta z) + \frac{P}{2\pi r} c'_2 S_{10}(r,\alpha z,\beta z)$$

$$\varepsilon_r(r,z) = \frac{P}{2\pi r}\left[c'_1\left\{r C_{01}(r,\alpha z,\beta z) - C_{00}(r,\alpha z,\beta z)\right\}\right]$$

$$+ \frac{P}{2\pi r}\left[c'_2\left\{r S_{01}(r,\alpha z,\beta z) - S_{00}(r,\alpha z,\beta z)\right\}\right]$$

$$\varepsilon_z(r,z) = \frac{P}{2\pi}\left[c_1\left\{-\alpha C_{01}(r,\alpha z,\beta z) - \beta S_{01}(r,\alpha z,\beta z)\right\}\right]$$

$$+ \frac{P}{2\pi}\left[c_2\left\{-\alpha S_{01}(r,\alpha z,\beta z) + \beta C_{01}(r,\alpha z,\beta z)\right\}\right]$$

Nous avons réuni les expressions des déplacements et des déformations dans les tableaux 2.7. et 2.8.

Les contraintes se calculent alors aisément avec les relations :

$$\sigma_r = A\varepsilon_r + F\varepsilon_\theta + D\varepsilon_z$$

$$\sigma_\theta = F\varepsilon_r + A\varepsilon_\theta + D\varepsilon_z$$

$$\sigma_z = D\varepsilon_r + D\varepsilon_\theta + C\varepsilon_z$$

N.B. : Nous n'avons pas donné la distorsion ε_{zr} ni la contrainte de cisaillement τ_{zr} ; elles peuvent être calculées par :

$$\varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \text{et} \qquad \tau_{zr} = 2G\,\varepsilon_{zr}$$

Tableau 2.7. Massif semi-infini aelotrope sous une charge concentrée P.
Expression des déplacements.

q	$w(r,z)$	$u(r,z)$	Expression des intégrales
$q < \frac{1}{2}(\sqrt{AC}-D)$	$\frac{P}{2\pi} a_1 I_{00}[r,(\alpha-\beta)z]$ $+ \frac{P}{2\pi} a_2 I_{00}[r,(\alpha+\beta)z]$	$\frac{P}{2\pi} q_1 a_1 I_{10}[r,(\alpha-\beta)z]$ $+ \frac{P}{2\pi} q_2 a_2 I_{10}[r,(\alpha-\beta)z]$	$I_{00}(r,\psi z) = \frac{1}{z}\frac{1}{\left(\psi^2+\frac{r^2}{z^2}\right)^{1/2}}$
$q = \frac{1}{2}(\sqrt{AC}-D)$	$\frac{P}{2\pi} b_1 I_{00}(r,\alpha z)$ $+ \frac{P}{2\pi} b_2 z I_{01}(r,\alpha z)$	$\frac{P}{2\pi} b_1' I_{10}(r,\alpha z)$ $+ \frac{P}{2\pi} b_2' z I_{11}(r,\alpha z)$	$I_{01}(r,\psi z) = \frac{1}{z^2}\frac{\psi}{\left(\psi^2+\frac{r^2}{z^2}\right)^{3/2}}$ $I_{02}(r,\psi z) = \frac{1}{z^3}\frac{2\psi^2-\frac{r^2}{z^2}}{\left(\psi^2+\frac{r^2}{z^2}\right)^{5/2}}$ $I_{10}(r,\psi z) = \frac{1}{r}\left[1-\frac{\psi}{\left(\psi^2+\frac{r^2}{z^2}\right)^{1/2}}\right]$ $I_{11}(r,\psi z) = \frac{r}{z^3}\frac{1}{\left(\psi^2+\frac{r^2}{z^2}\right)^{3/2}}$
$q > \frac{1}{2}(\sqrt{AC}-D)$	$\frac{P}{2\pi} c_1 C_{00}$ $+ \frac{P}{2\pi} c_2 S_{00}$	$\frac{P}{2\pi} c_1' C_{10}$ $+ \frac{P}{2\pi} c_2' S_{10}$	$C_{00} = \frac{\cos x}{zY}$ $C_{01} = \frac{\alpha\cos 3x + \beta \sin 3x}{z^2 Y^3}$ $S_{00} = \frac{\sin x}{zY}$ $S_{01} = \frac{\alpha \sin 3x - \beta\cos 3x}{z^2 Y^3}$ $C_{10} = \frac{Y - \alpha\cos x - \beta \sin x}{rY}$ $S_{10} = \frac{-\alpha \sin x + \beta\cos x}{rY}$
Les valeurs des coefficients sont données page suivante.	$X = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2+\frac{r^2}{z^2}}$	$Y = \frac{z}{r}\left[\left(\alpha^2-\beta^2+\frac{r^2}{z^2}\right)^2+4\alpha^2\beta^2\right]^{1/4}$	

Tableau 2.8. Massif semi-infini aelotrope sous une charge concentrée P.

Expression des déformations.

q	$\varepsilon_\theta(r,z)$	$\varepsilon_r(r,z)$	$\varepsilon_z(r,z)$
$q < \frac{1}{2}\left(\sqrt{AC} - D\right)$	$\frac{P}{2\pi r} q_1 a_1 I_{10}[r,(\alpha-\beta)z]$ $+\frac{P}{2\pi r} q_2 a_2 I_{10}[r,(\alpha+\beta)z]$	$\frac{P}{2\pi r} q_1 a_1 \left\{ r I_{01}[r,(\alpha-\beta)z] - I_{10}[r,(\alpha-\beta)z] \right\}$ $+\frac{P}{2\pi r} q_2 a_2 \left\{ r I_{01}[r,(\alpha+\beta)z] - I_{10}[r,(\alpha+\beta)z] \right\}$	$-\frac{P}{2\pi} a_1(\alpha-\beta) I_{01}[r,(\alpha-\beta)z]$ $-\frac{P}{2\pi} a_2(\alpha+\beta) I_{01}[r,(\alpha+\beta)z]$
$q = \frac{1}{2}\left(\sqrt{AC} - D\right)$	$\frac{P}{2\pi r} b_1' I_{10}(r,\alpha z)$ $+\frac{P}{2\pi r} b_2' z I_{11}(r,\alpha z)$	$\frac{P}{2\pi r} b_1' \left\{ r I_{01}(r,\alpha z) - I_{10}(r,\alpha z) \right\}$ $+\frac{P}{2\pi r} b_2' z \left\{ r I_{02}(r,\alpha z) - I_{11}(r,\alpha z) \right\}$	$-\frac{P}{2\pi} b_1 \alpha I_{01}(r,\alpha z)$ $-\frac{P}{2\pi} b_2 \left\{ \alpha z I_{02}(r,\alpha z) - I_{01}(r,\alpha z) \right\}$
$q > \frac{1}{2}\left(\sqrt{AC} - D\right)$	$\frac{P}{2\pi r}\left\{ c_1' C_{10} + c_2' S_{10} \right\}$	$\frac{P}{2\pi r}\left\{ c_1'\left(r C_{01} - C_{00} \right) \right\}$ $+\frac{P}{2\pi r}\left\{ c_2'\left(r S_{01} - S_{00} \right) \right\}$	$\frac{P}{2\pi}\left\{ c_1\left(-\alpha C_{01} - \beta S_{01} \right) \right\}$ $+\frac{P}{2\pi}\left\{ c_2\left(-\alpha S_{01} + \beta C_{01} \right) \right\}$

$$a_1 = \sqrt{\frac{A}{C}}\,\frac{D + C(\alpha+\beta)^2}{2\beta\left(D^2 - AC\right)} \qquad q_1 = \frac{q - C(\alpha-\beta)^2}{(D+q)(-\alpha+\beta)} \qquad b_1 = -\frac{2C\alpha^3}{q}\cdot\frac{D+q}{\left(D+C\alpha^2\right)^2} \qquad b_1' = \frac{C\alpha^2\left(3q + D - C\alpha^2\right) + qD}{q\left(D + C\alpha^2\right)^2} \qquad C_1 = 2\alpha\frac{\sqrt{AC}}{D^2 - AC} \qquad c_1' = \frac{1}{\sqrt{AC} + D}$$

$$a_2 = -\sqrt{\frac{A}{C}}\,\frac{D + C(\alpha-\beta)^2}{2\beta\left(D^2 - AC\right)} \qquad q_2 = \frac{q - C(\alpha+\beta)^2}{(D+q)(-\alpha-\beta)} \qquad b_2 = -\frac{\alpha^2}{q}\cdot\frac{D+q}{D+C\alpha^2} \qquad b_2' = -\frac{\alpha\left(C\alpha^2 - q\right)}{q\left(D + C\alpha^2\right)} \qquad C_2 = -\frac{\sqrt{\frac{A}{C}}}{2q\beta} \qquad c_2' = -\frac{\alpha}{\beta\left(\sqrt{AC} - D\right)}$$

Les valeurs des intégrales sont données page précédente.

2.3.2. Charge normale uniformément répartie sur un cercle de rayon R

La transformée de HANKEL de la fonction de répartition est :

$$\overline{P}_o(\xi) = \frac{pR}{\xi} J_1(\xi R)$$

Dans le but de dégager l'influence des paramètres de l'aélotropie sur les tassements, nous n'avons calculé que le tassement du centre du cercle $w_o = w\ (r = 0,\ z = 0)$.

a - $G < G_o$

Les calculs conduisent à $$w_o = pR\ 2\alpha \frac{\sqrt{AC}}{D^2 - AC}$$

b - $G = G_o$ $$w_o = -pR \frac{2\alpha c\alpha^2 (D+G)}{G(D+c\alpha^2)}$$

Isotropie : Compte tenu des valeurs prises dans ce cas par les paramètres (§ 2.2.2.), on arrive à l'expression connue :

$$w_o = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} pR$$

c - $G > G_o$ $$w_o = pR\ 2\alpha \frac{\sqrt{AC}}{D^2 - AC}$$

N.B. : Cas du cercle rigide

GERRARD [36] a donné le tassement w_o d'un cercle rigide reposant sur un massif aelotrope et soumis à une charge normale centrée P. Avec nos notations, ses résultats s'écrivent :

$$\overline{w}_o = \frac{P}{4R}\ 2\alpha \frac{\sqrt{AC}}{D^2 - AC} \qquad \text{pour } G \neq G_o$$

$$\overline{w}_o = -\frac{P}{4R}\ 2\alpha \frac{c\alpha^2 (D+G)}{G(D+c\alpha^2)} \qquad \text{pour } G = G_o$$

On constate alors que le rapport du tassement du cercle rigide à celui du centre du cercle souple vaut, comme en isotropie : $\frac{\pi}{4}$.

2.4. Etude de l'influence des différents paramètres

A partir des expressions obtenues au § 2.3., nous avons écrit un programme permettant, d'une part le calcul du tassement du centre du cercle souple et, d'autre part, celui des contraintes σ_z, σ_r et σ_θ en tout point du massif aélotrope soumis à une charge concentrée normale.

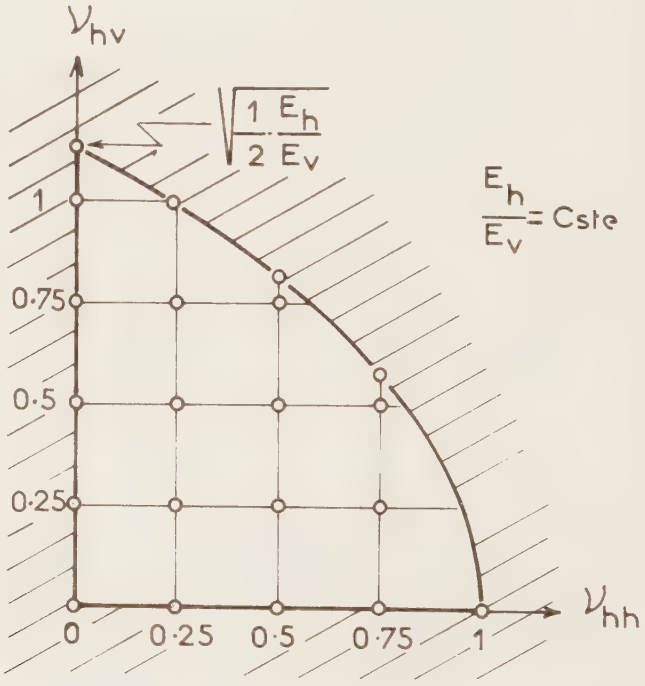
Le calcul a été effectué pour :

$\frac{E_h}{E_v}$ = 0.125, 0.25, 0.5, 1, 2, 4 et 8.

$\frac{G}{E_v}$ = 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.825, 1, 1.5 et $\frac{G_o}{E_v}$

avec chacune des combinaisons (ν_{hh}, ν_{hv}) représentées sur la figure ci-dessous.

Nous avons alors étudié environ 300 massifs aélotropes recouvrant tout le domaine $(E_h, E_v, \eta, \nu_{hh}, \nu_{hv})$ susceptible d'intéresser la mécanique des sols. Nous ne présenterons que quelques courbes typiques.



2.4.1. Etude des tassements

Nous exprimons le tassement w_o sous la forme :

$$w_o = p \frac{\pi R}{E_v} \rho$$

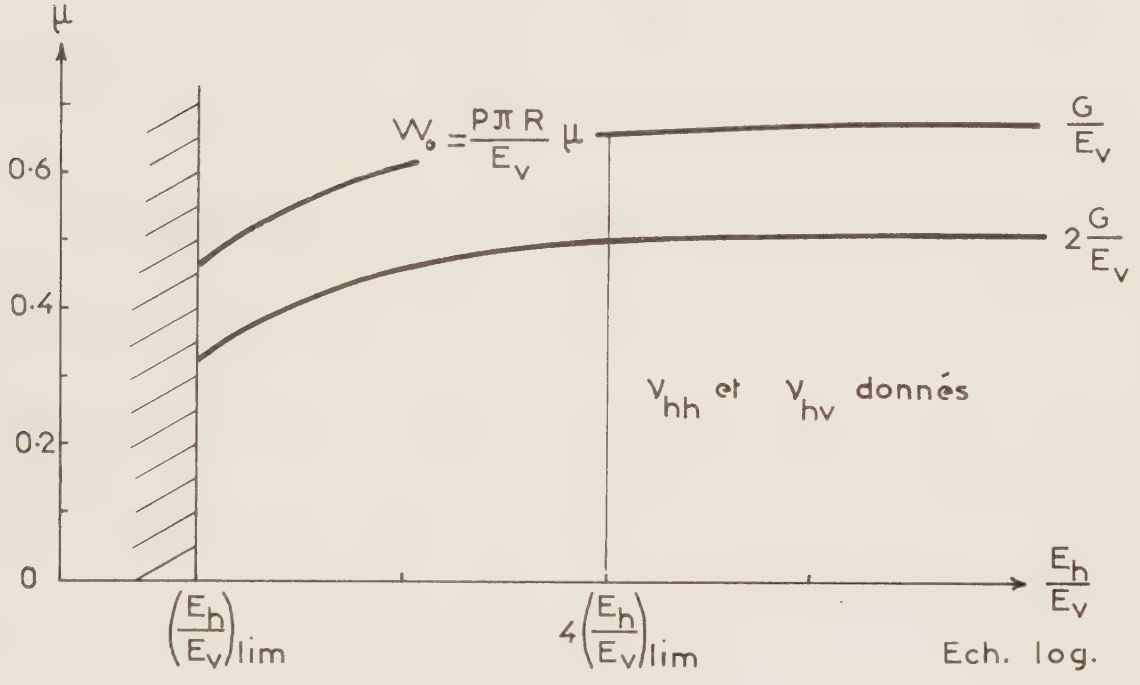
$$= \frac{P}{R E_v} \rho$$

où ρ est un coefficient sans dimension dépendant des paramètres de l'aélotropie.

$P = \pi R^2 . p$

a - Influence des modules ($\frac{E_h}{E_v}$ et $\frac{G}{E_v}$)

Nous avons tracé pour des valeurs données de (ν_{hh}, ν_{hv}) les courbes de variation du tassement en fonction de $\frac{E_h}{E_v}$, paramétrées en $\frac{G}{E_v}$ (exemple figure 2.9.). Toutes ces courbes (sauf pour $\nu_{hv} = 0$) ont même allure (figure ci-dessous).



La valeur $\left(\frac{E_h}{E_v}\right)_{lim}$ est déduite des conditions sur les coefficients de POISSON :

$$\left(\frac{E_h}{E_v}\right)_{lim} = 2\,\frac{\nu_{hv}^2}{1-\nu_{hh}}$$

Nous avons constaté que même lorsque le domaine $0.5 < \frac{E_h}{E_v} < 3$ correspondant aux sols recouvrait l'intervalle des fortes variations du tassement $\left(\text{de } \left(\frac{E_h}{E_v}\right)_{lim} \text{ à } 4\left(\frac{E_h}{E_v}\right)_{lim}\right)$, l'influence de $\frac{G}{E_v}$ était plus grande que celle de $\frac{E_h}{E_v}$.

Ainsi, l'influence importante de $\frac{E_h}{E_v}$ observée sur la courbe $G = G_o$ (figure 2.9.) est, en fait, due à G qui varie alors avec $\frac{E_h}{E_v}$. Le cas du corps aélotrope incompressible (figure 2.10.) conduit aux même résultats.

b - Influence des coefficients de POISSON

Il n'est pas aisé de comparer les influences de ν_{hh} et ν_{hv} ; le domaine de variation de ν_{hv} dépend de ν_{hh} et réciproquement.

Nous avons cependant tracé (figures 2.11. et 2.12.) les courbes de variations en fonction de $\frac{E_h}{E_v}$ de la plus grande et de la plus petite valeur du tassement données par (ν_{hh} , ν_{hv}), pour $\frac{G}{E_v} = 0.5$ et $G = G_o$.

- La plus grande valeur est obtenue comme en isotropie pour $\nu_{hh} = \nu_{hv} = 0$.
- La plus petite s'observe pour $\nu_{hh} = 0$ et $\nu_{hv} = \nu_{hv\,limite} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{E_h}{E_v}}$

En isotropie, le coefficient ν peut faire passer le tassement de 1 à 0.750.

Dans le cas de la figure 2.12 où $G = G_o$, le rapport $\frac{w_{min}}{w_{max}}$ est indépendant de $\frac{E_h}{E_v}$ et vaut 0.595.

Par contre, si G est fixé et vaut, par exemple, 0.5 (figure 2.11.), ce rapport va de 0.570 pour $\frac{E_h}{E_v} = 3$ à 0.455 pour $\frac{E_h}{E_v} = 0.5$.

Il apparaît donc que l'influence du couple (ν_{hh}, ν_{hv}) est plus grande que ne l'est en isotropie celle de ν .

Tassement du centre du cercle uniformément chargé reposant sur un massif semi-infini aélotrope.

Influence des modules ($\frac{G}{E_v}$ et $\frac{E_h}{E_v}$)

$$W_o = \frac{P}{R E_v} \mu$$

(La valeur G_o de G est définie au § 2.2.2.).

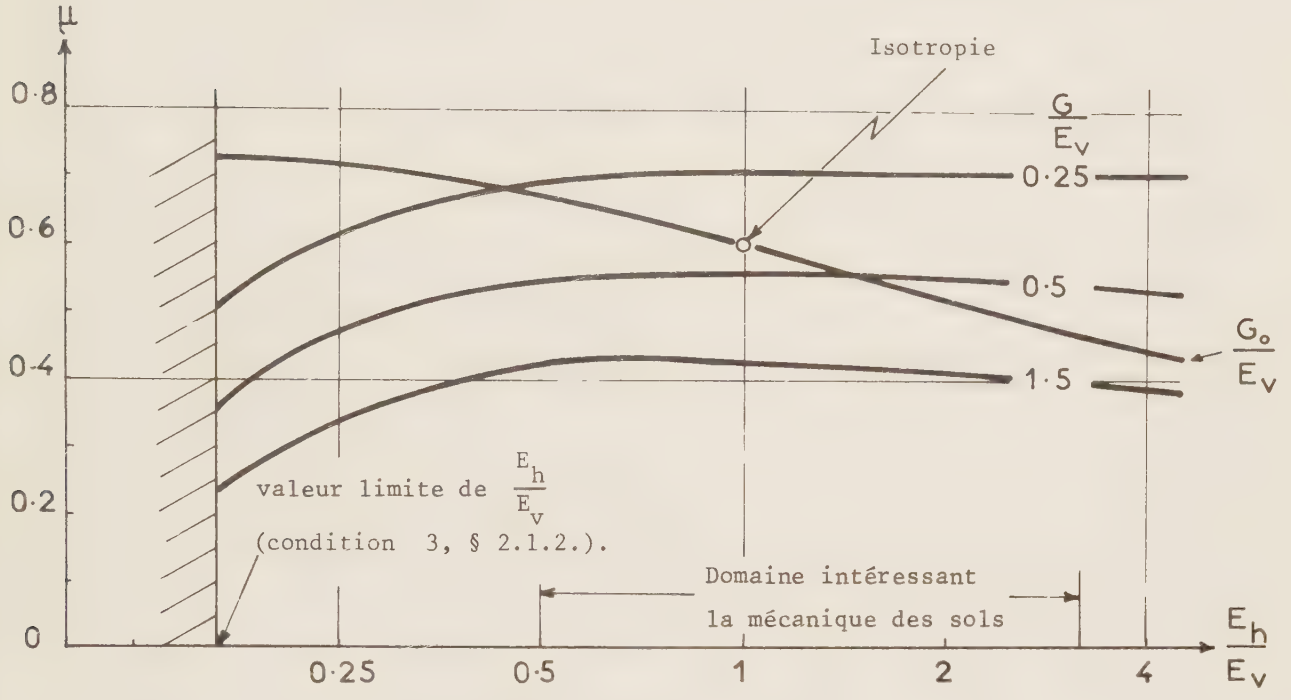


Figure 2.9. Massif correspondant à $\nu_{hh} = \nu_{hv} = 0.25$.

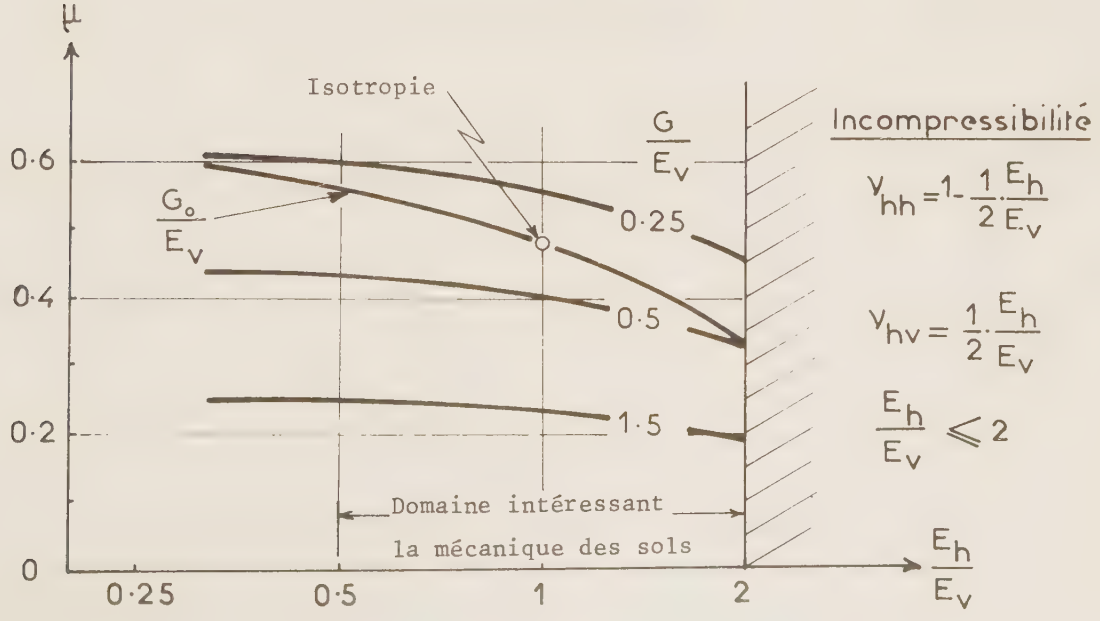


Figure 2.10. Massif incompressible.

Figure 2.11. Valeurs extrêmes du tassement du centre du cercle uniformément chargé reposant sur un massif semi-infini aélotrope.

$$W_o = \frac{P}{R E_v} \mu$$

$$\left(\mu_{\text{isotrope.}} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \right)$$

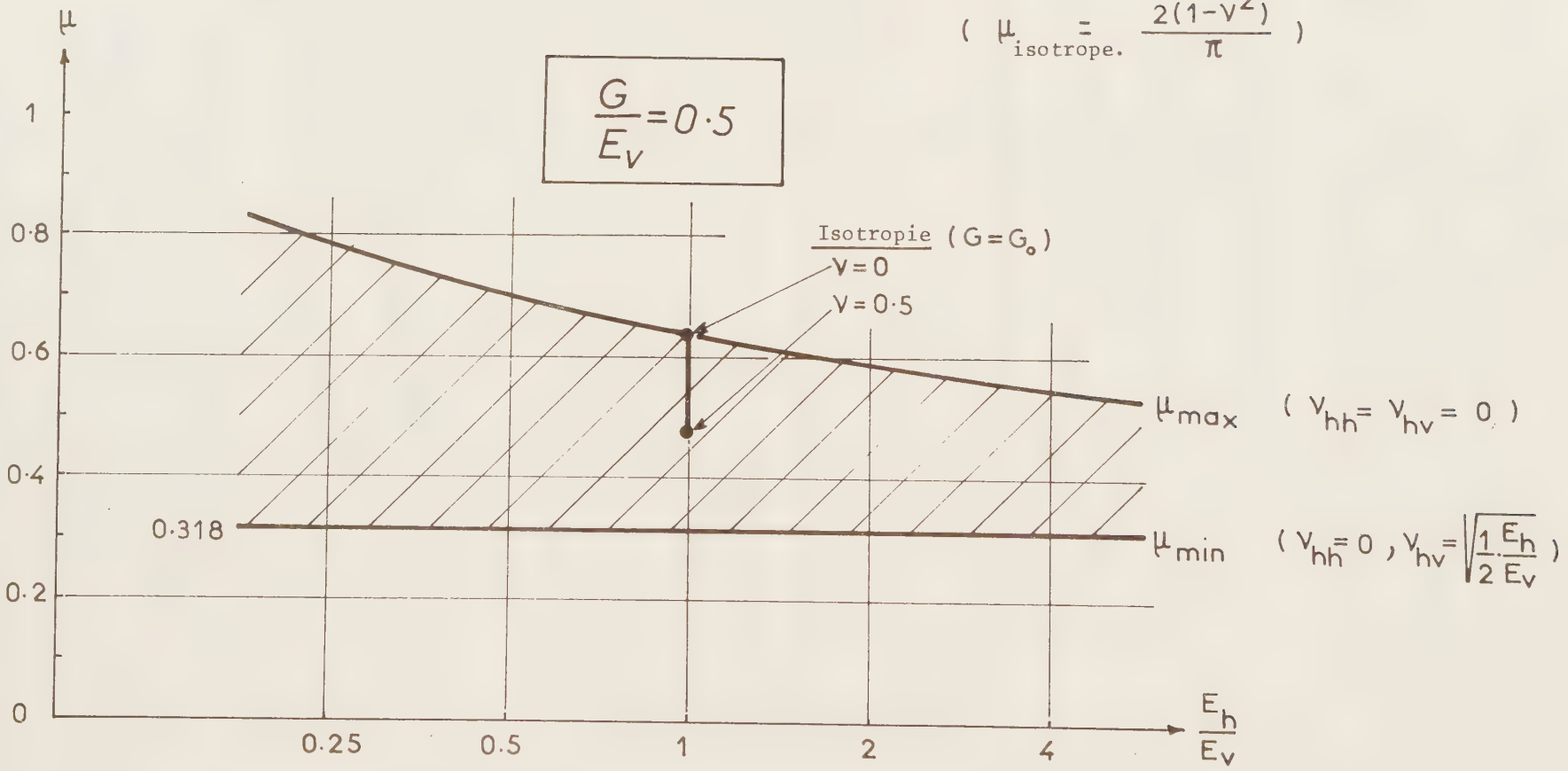
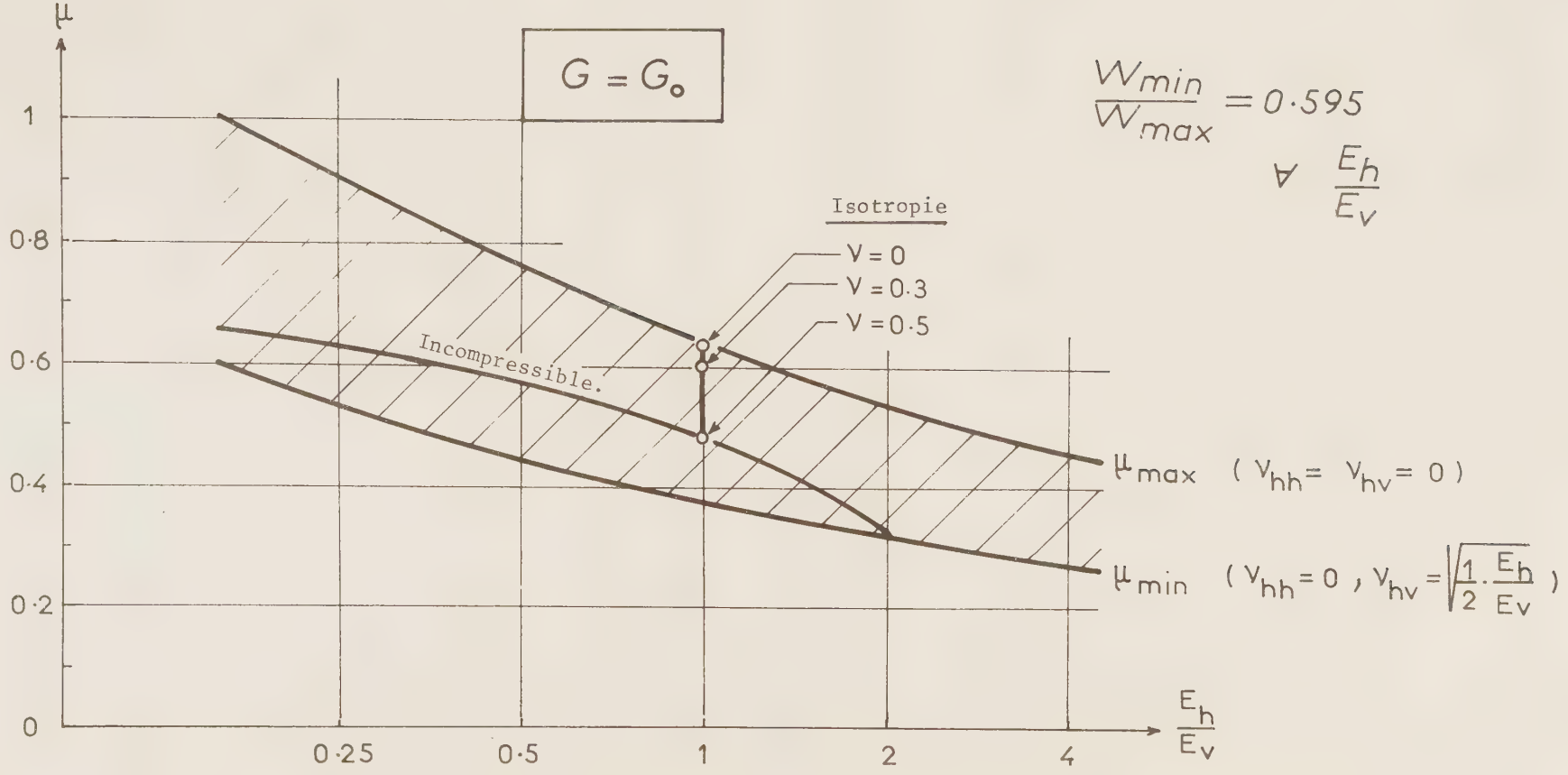


Figure 2.12. Valeurs extrêmes du tassement du centre du cercle uniformément chargé reposant sur un massif semi-infini aélotrope.

$$W_o = \frac{P}{R E_v} \mu$$



$$\frac{W_{min}}{W_{max}} = 0{\cdot}595 \quad \forall \ \frac{E_h}{E_v}$$

2.4.2. Etude des répartitions de contraintes

De l'étude des courbes de répartitions, nous avons dégagé les conclusions générales suivantes.

L'importance primordiale du module de cisaillement G, déjà notée dans l'étude des tassements, se confirme très nettement ici (figures 2.13. et 2.14.). Nous avons pu constater que σ_z était à peu près inversement proportionnelle à $\frac{G}{E_v}$, quelles que soient par ailleurs les valeurs de $\frac{E_h}{E_v}$, ν_{hh} et ν_{hv}. L'influence de $\frac{E_h}{E_v}$ est faible devant celle de $\frac{G}{E_v}$. Celle des coefficients de POISSON sur σ_z l'est aussi ; par contre, comme on pouvait s'y attendre, σ_r et σ_θ dépendent beaucoup de ν_{hh} et ν_{hv}.

N.B. : Il ne faut pas oublier cependant que nous ne parlons que du massif semi-infini ; dans le cas d'un monocouche, les coefficients de POISSON seraient très influents.

Notons encore, à ce propos, la référence faite par GERRARD [38] à une étude récente non publiée où il conclut qu'"en général, une variation de $\frac{E_h}{E_v}$ a un effet plus important sur l'estimation des tassements qu'une variation de $\frac{G_h}{G_v}$ ".

G_h et G_v sont les modules de cisaillement dans des plans horizontaux et verticaux et ici :

$$G_h = \frac{E_h}{2(1+\nu_{hh})} \qquad \text{et } G_v = G$$

Cette affirmation, contrairement aux apparences, n'est pas en contradiction avec nos conclusions. Si nous fixons, en effet, E_h comme module de référence, comparer les influences de $\frac{E_h}{E_v}$ et $\frac{G_h}{G_v}$ sur les tassements, revient à comparer celles de E_v et $G_v \cdot (1 + \nu_{hh})$ et il est certain que E_v sera plus important que G_v (les tassements lui sont proportionnels).

Figure 2.13. Répartition des contraintes σ_z sous une charge concentrée normale pour différentes valeurs de $\frac{G}{E_v}$ et $\frac{E_h}{E_v}$.

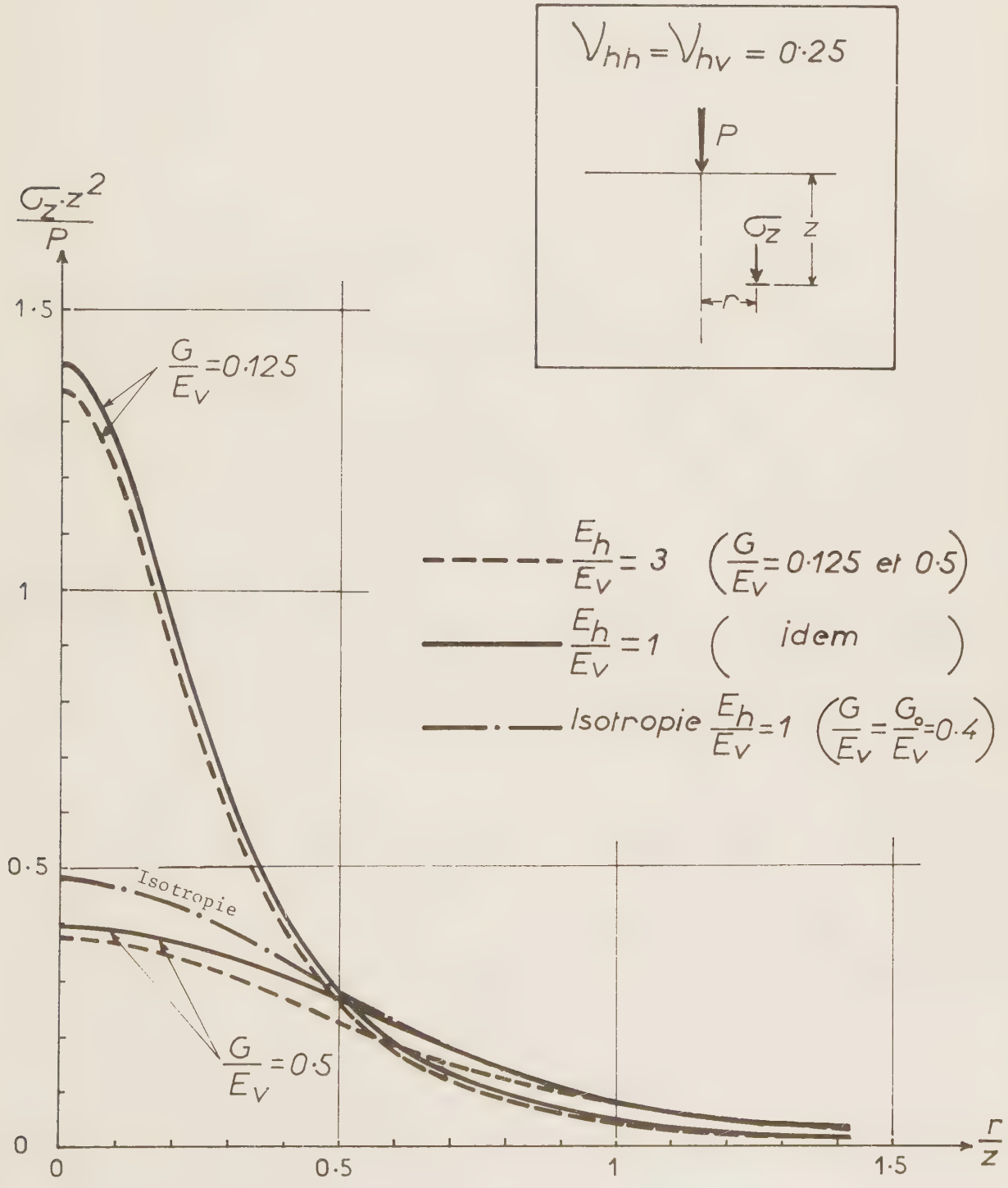
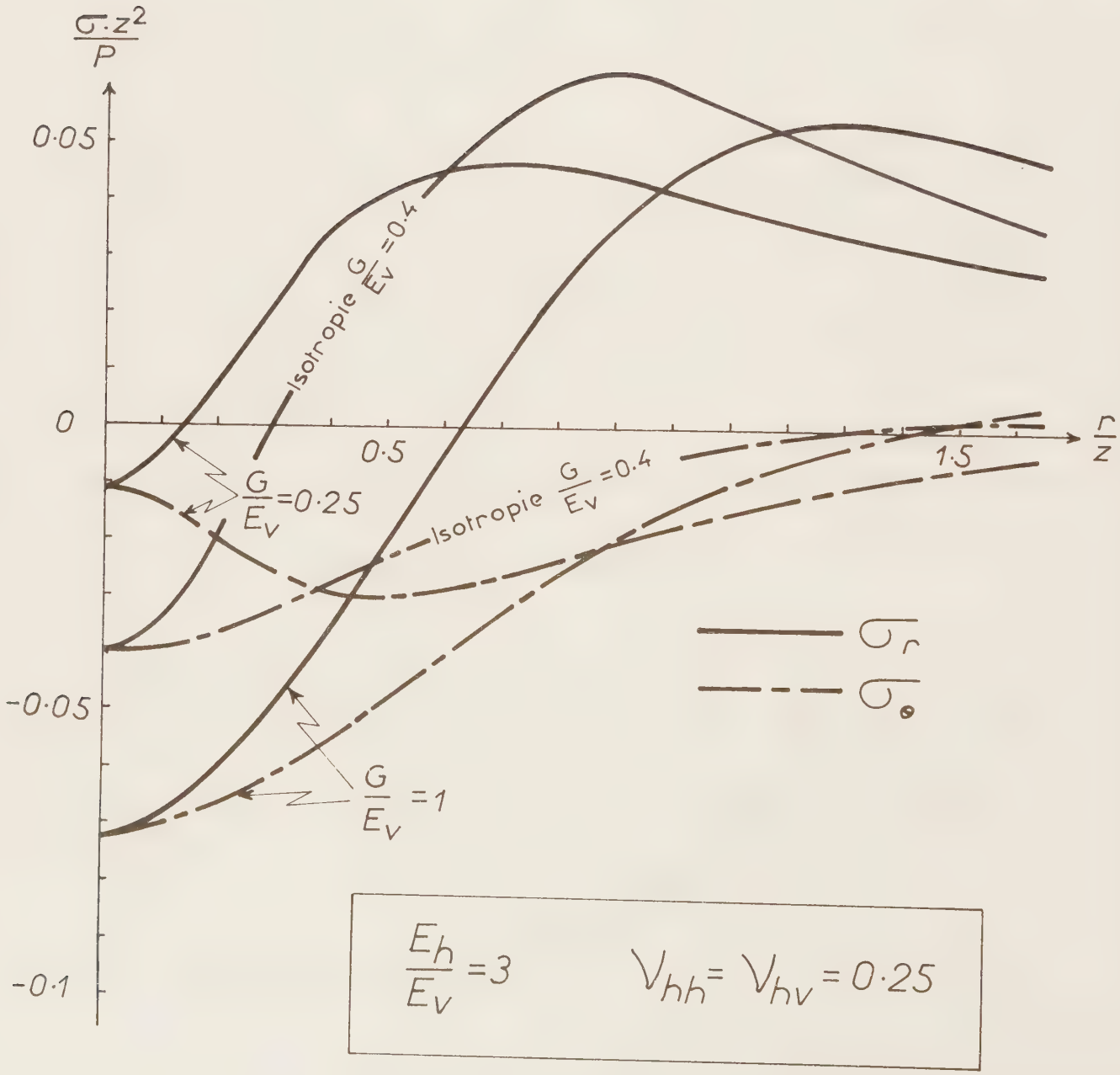


Figure 2.14. Répartition des contraintes σ_r et σ_θ sous une charge concentrée normale pour différentes valeurs de $\frac{G}{E_v}$.



2.4.3. Conclusions

Cette étude a montré que le module de cisaillement dans un plan vertical était un paramètre très important. Cet avis est d'ailleurs partagé par HOLLINGSHEAD et RAYMOND [49] et [50].

Il est donc indispensable de le connaître avec une précision satisfaisante. Or, il n'est pas possible de mesurer ce module dans les sols ; peut-être les méthodes électriques ou sismiques utilisées pour les roches et récemment appliquées aux sols (HARDIN [44]), permettront-elles un jour de répondre au problème.

Ainsi, les travaux de KONING, de LEKNITSKII, de DE URENA et PIQUER [24], de même que les programmes de calcul proposés par HARRISON et GERRARD [45], et concernant un grand nombre de cas de charge, ne sont-ils pas directement applicables puisqu'ils nécessitent la connaissance de G. Plusieurs auteurs ont tenté de relier G aux autres paramètres de l'aélotropie et nous discutons ci-dessous leurs études.

3. - RELATIONS ENTRE LES DIFFERENTS PARAMETRES DE L'AELOTROPIE DANS LES SOLS ET LES ROCHES

3.1. Expression de G en fonction des modules et coefficients de POISSON

3.1.1. Etudes antérieures

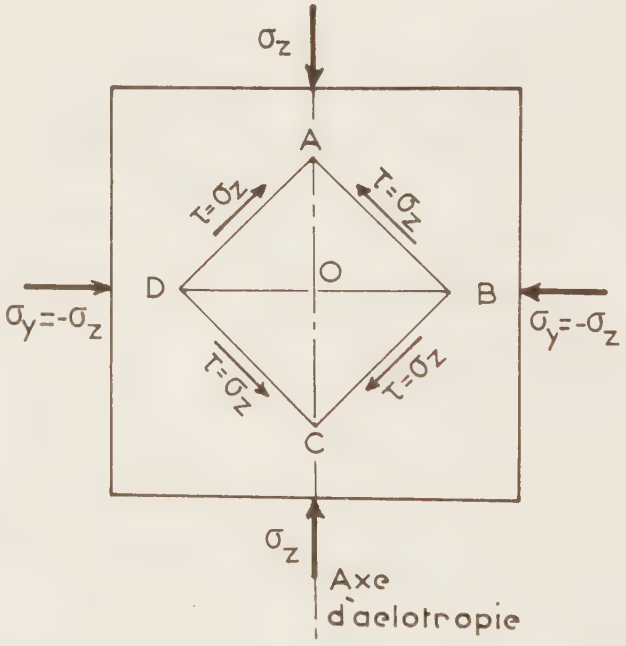
a - Modèle de BARDEN

BARDEN [6] a considéré un échantillon à base carrée, d'axe d'aélotropie oz, soumis à l'état plan de contrainte ($\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -\sigma_z$).

Le calcul de la diminution γ de l'angle droit DAB en fonction de $\tau = \sigma_z$ donne :

$$\gamma = \frac{1 + 2\nu_{hv} + \frac{E_h}{E_v}}{E_h}\,\tau$$

Il a alors supposé que le rapport entre τ et γ soit $\frac{E_h}{1 + 2\nu_{hv} + \frac{E_h}{E_v}}$ était le module de cisaillement G, ce qui est faux.



Le paramètre G de l'aélotropie est, en effet, le rapport entre la contrainte de cisaillement τ_{yz} qui s'exerce suivant OB (et OA) et la variation γ_{yz} de l'angle droit AOB qu'elle provoque.

Il était de toute façon illusoire de vouloir, par un simple artifice de calcul et sans hypothèse supplémentaire, ramener de 5 à 4 le nombre des paramètres.

Nous avons constaté que DOOLEY [25] avait déjà fait cette critique dans une discussion de l'article de BARDEN.

Bien que sans fondement, cette valeur de G a cependant été retenue par de nombreux auteurs (SILVEIRA [90], MILOVIC [69] à [72], NIWA [75], KAWAMOTO [55]), ce qui diminue considérablement l'intérêt de leurs travaux.

b - Modèle de TAN-TJONG-KIE

Pour un état plan de déformation ($\varepsilon_\theta = 0$), les relations (§ 2.1.1.) entre les contraintes et déformations deviennent :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_h^*}\sigma_r - \frac{\nu_{vh}^*}{E_v^*}\sigma_z$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{hv}^*}{E_h^*}\sigma_r + \frac{1}{E_v^*}\sigma_z$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G}\tau_{zr}$$

où apparaissent de nouveaux paramètres :

$$E_h^* = \frac{E_h}{1-\nu_{hh}^2} \qquad E_v^* = \frac{E_v}{1-\nu_{hv}\nu_{vh}}$$

avec $\dfrac{\nu_{hv}^*}{\nu_{vh}^*} = \dfrac{E_h^*}{E_v^*}$

$$\nu_{vh}^* = \frac{\nu_{vh}(1+\nu_{hh})}{1-\nu_{vh}\nu_{hv}} \qquad \nu_{hv}^* = \frac{\nu_{hv}}{1-\nu_{hh}}$$

TAN [93] a supposé que G était lié à $E' = \sqrt{E_h^* \cdot E_v^*}$ et $\nu' = \sqrt{\nu_{hv}^* \cdot \nu_{vh}^*}$ par la relation qui, en isotropie, donne le module de cisaillement en fonction du module d'YOUNG et du coefficient de POISSON, soit :

$$G = \frac{E'}{2(1+\nu')}$$

Cette hypothèse permet de rendre les équations différentielles du problème plan en aélotropie, identiques aux équations de NAVIER-LAME en isotropie.

Nous avons, en outre, remarqué que cette valeur particulière de G était G_o définie en 2.2.2., ce qui est normal puisque l'isotropie est un cas particulier de $G = G_o$.

Cependant, cette valeur ne correspond à aucune réalité physique et l'hypothèse $G = G_o$ adoptée pour les sols par TAN-THONG-KIE peut conduire, compte tenu de l'influence de G, à des résultats très éloignés des valeurs réelles.

c - Modèle de GUTMAN

Afin de corriger les valeurs des contraintes calculées avec l'hypothèse $G = G_o$ de TAN, GUTMAN [43] introduit la quantité $\operatorname{ch} 2\delta = \frac{E'}{2G} - \nu'$

- Lorsque $G = G_o$, le problème bidimensionnel de l'aélotropie peut être traité exactement par l'isotropie, δ est alors nul.

- Lorsque G est différent de G_o, GUTMAN propose de calculer encore les contraintes en isotropie en supposant qu'elles différeront des valeurs exactes correspondant à G, de la quantité $\operatorname{ch}\delta - 1$; cette expression a été retenue par GUTMAN en comparant les contraintes obtenues en isotropie et celles calculées en aélotropie, pour quelques cas traités par LEKHNITSKII.

Nous avons pu constater sur quelques exemples que si la correction de GUTMAN est satisfaisante lorsque G est assez voisin de G_o, elle l'est moins dans le cas contraire (erreur de 10 à 15 % entre σ_z corrigée par la méthode GUTMAN et les valeurs exactes, lorsque G diffère de G_o d'environ 50 %).

Quoi qu'il en soit, le problème n'est pas résolu pour autant puisqu'il faut connaître G pour évaluer cette correction.

d - Modèle de WIENDIECK

Nous étudions,au chapitre suivant,le modèle proposé par WIENDIECK. Nous verrons qu'il semble le plus satisfaisant car, contrairement aux précédents, il repose sur des observations et des expériences faites sur les sols.

Notons enfin que WOLF cité par WIENDIECK donne sans explication :

$$G = \frac{E_h}{1 + 2\nu_{vh} + \frac{E_h}{E_v}}$$

Nous avons réuni sur la figure 3.2. les valeurs de G proposées par ces différents auteurs.

3.2.2. Expression de G proposée

a - Hypothèse

Soit un échantillon cylindrique dont l'axe fait un angle Θ avec l'axe d'aélotropie (vertical). Si nous le soumettons à une contrainte axiale σ_Θ, la déformation ε_Θ vaut (§ 2.1.1.b.):

$$\varepsilon_\Theta = \left[\frac{1}{E_h} \sin^4\Theta + \frac{1}{E_v} \cos^4\Theta - \frac{2\nu_{hv}}{E_h} \cos^2\Theta \sin^2\Theta + \frac{1}{G} \sin^2\Theta \cos^2\Theta \right] \sigma_\Theta$$

Le module d'YOUNG dans la direction Θ est donc :

$$E_\Theta = \frac{\varepsilon_\Theta}{\sigma_\Theta} = \frac{E_h}{\sin^4\Theta + \frac{E_h}{E_v} \cos^4\Theta + \sin^2\Theta \cos^2\Theta \left(\frac{E_h}{G} - 2\nu_{hv} \right)}$$

Nous retrouvons évidement E_v pour $\Theta = 0$ et E_h pour $\Theta = \frac{\pi}{2}$; cette équation est paramétrée en $X = \frac{E_h}{G} - 2\nu_{hv}$ dont la valeur va donc déterminer la forme de la courbe décrite par E_Θ.

Reprenant une idée de WIENDIECK, nous ferons alors pour les sols l'hypothèse de la variation ellipsoïdale du module E_Θ en fonction de Θ, ce qui permet d'évaluer X et, par suite, G (§ 3.2.2.d.).

Nous rappelons ci-dessous les observations conduisant à cette hypothèse.

b - Anisotropie de structure

Les expériences de WIENDIECK sur un matériau pulvérulent bidimensionnel et celles de FIELD sur des graviers (§ 1.2.3.a.) ont montré que l'anisotropie de structure pouvait être représentée par un ellipsoïde. Les courbes polaires donnant le nombre de plans de contact en fonction de leur orientation sont des ellipses (figure 1.8.).

De même, l'hypothèse de l'ellipse a été utilisée pour la perméabilité par CAQUOT et KERISEL et par SCHEIDEGGER [87].

Or, il ne fait aucun doute que l'anisotropie de structure et l'anisotropie mécanique sont liées au moins qualitativement. Nous avons discuté ce point au § 1.2.3., et WIENDIECK le montre encore en rapprochant les courbes représentant les variations, en fonction de l'indice des vides, du degré de chacune des deux anisotropies. WIENDIECK suppose même que dans les sables, le rapport $\frac{E_h}{E_v}$ est égal au rapport $\frac{b}{a}$ des axes de l'ellipse représentant l'anisotropie de structure.

Cette analogie formelle permet de penser que les propriétés mécaniques anisotropes varient également suivant une loi ellipsoïdale, ce que d'ailleurs l'expérience a révélé pour certains paramètres.

c - Anisotropie mécanique

- cohésion

L'étude de AAS [1] et celle de DAVIS et CHRISTIAN [21] concernant les travaux de plusieurs chercheurs, ont montré une bonne concordance entre les courbes expérimentales de variations de la cohésion avec l'orientation, et les ellipses théoriques.

- résistance limite à la compression simple

DAYRE [23] a trouvé des ellipsoïdes quelconques dans les roches métamorphiques, et de révolution dans les roches ignées. PERES RODRIGUES [76] a également obtenu des ellipsoïdes quelconques pour des granites prélevés dans différents sites.

- modules d'YOUNG

Les seules mesures de E_θ dont nous avons eu connaissance dans les sols sont celles de BOEHLER sur les argiles ; elles n'ont été effectuées que pour $\theta = 0$, 30°, 45°, 60° et 90° et les points correspondant s'éloignent peu de l'ellipse.

Par contre, les essais sur les roches ont été nombreux (DOUGLAS et VOIGHT [26], PERES RODRIGUES [76] et [77]) et conduisent très nettement à des ellipsoïdes.

d - Valeur de G

L'expression de E_θ est (§ 3.2.2.a.) :

$$E_\theta = \frac{E_h}{\sin^4\theta + \frac{E_h}{E_v}\cos^4\theta + X \sin^2\theta \cos^2\theta} \qquad \text{avec } X = \frac{E_h}{G} - 2\nu_{hv}$$

Nous avons donc déterminé X de façon que la courbe décrite par E_θ soit la plus voisine possible d'une ellipse.

Ce calcul fut utilisé par WIENDIECK, mais la valeur $1 + \frac{E_h}{E_v}$ qu'il trouva par tâtonnement pour X n'est valable que pour $\frac{E_h}{E_v}$ compris entre 0.4 et 1, domaine où se situe l'anisotropie des sables qu'il étudia. Pour $\frac{E_h}{E_v} = 3$, la courbe E_θ, déduite de la valeur précédente de X, est très différente d'une ellipse (fig. 3.1.).

L'équation polaire de l'ellipse passant par E_h et E_v est :

$$E^e_\theta = \frac{E_h}{\sqrt{\sin^2\theta + \left(\frac{E_h}{E_v}\right)^2 \cos^2\theta}}$$

Nous avons alors calculé pour chaque valeur de $\frac{E_h}{E_v}$ la valeur X_m de X qui rend minimum la quantité $\frac{E_\theta - E^e_\theta}{E^e_\theta}$. Les résultats sont reproduits ci-dessous.

$$G = \frac{E_h}{X_m + 2\nu_{hv}}$$

E_h/E_v	X_m	$M_{ax}\left(\frac{E_\theta - E^e_\theta}{E^e_\theta}\right)$
0.35	1.705	2.6 %
0.50	1.675	0.8 %
1.00	2.000	0
1.50	2.600	0.2 %
2.00	3.355	0.8 %
2.50	4.210	1.8 %
3.00	5.155	2.8 %

Il n'est pas possible de descendre en-dessous des valeurs indiquées de $M_{ax}\left(\frac{E_\theta - E^e_\theta}{E^e_\theta}\right)$ car, sauf pour $\frac{E_h}{E_v} = 1$, l'expression de E_θ n'est pas celle d'une ellipse (Pour $\frac{E_h}{E_v} = 1$, $E_\theta = E_h = E_v$ $\forall\theta$, et la courbe est un cercle).

Nous avons cherché également une expression littérale de X_m en imposant à la courbe représentant E_θ de couper l'ellipse associée, pour $\theta = \frac{\pi}{4}$; d'où la valeur :

$$X_1 = \sqrt{8\left[1+\left(\frac{E_h}{E_v}\right)^2\right]} - \left(1+\frac{E_h}{E_v}\right)$$

Cette expression conduit à des valeurs très voisines de X_m ; l'écart est inférieur à 4 % si $\frac{E_h}{E_v}$ vaut 3 ou 0.35 et il tend vers 0 si $\frac{E_h}{E_v}$ se rapproche de 1.

Nous avons donc retenu l'expression X_1 de X qui donne pour G la valeur que nous noterons G_x :

$$\frac{G_x}{E_v} = \frac{N}{\sqrt{8(1+N^2)} - (1+N) + 2\nu_{hv}} \qquad N = \frac{E_h}{E_v}$$

La figure 3.1. montre les courbes E_θ pour diverses valeurs du module de cisaillement. Notons que si on se donne la forme de la courbe E_θ (ici l'ellipse), la méthode permet de déterminer ce module avec une précision très satisfaisante, car une faible variation de G conduit à deux courbes E_θ assez différentes.

Il serait donc très intéressant de préciser par l'expérience la forme de cette courbe pour les sols ; des essais ont d'ailleurs été très récemment entrepris par BOEHLER à Grenoble.

On constate sur la figure 3.2. que les valeurs de G proposées par certains auteurs (§ 3.1.1.) peuvent être assez éloignées, en particulier pour $\frac{E_h}{E_v}$ supérieur à 1. Ceci conduit, compte tenu de l'influence de G, à d'importants écarts entre les résultats obtenus avec ces différents modèles (tassements et contraintes).

Auteurs	Valeurs de G
WIENDIECK	$\frac{E_h}{1+\sqrt{E_h/E_v}+2\nu_{hv}}$
WOLF	$\frac{E_h}{1+E_h/E_v+2\nu_{vh}}$
BARDEN	$\frac{E_h}{1+E_h/E_v+2\nu_{hv}}$
TAN TJONG-KIE	G_o (§ 2.2.2.)
Modele proposé ici	$G_x = \frac{E_h}{X_1 + 2\nu_{hv}}$

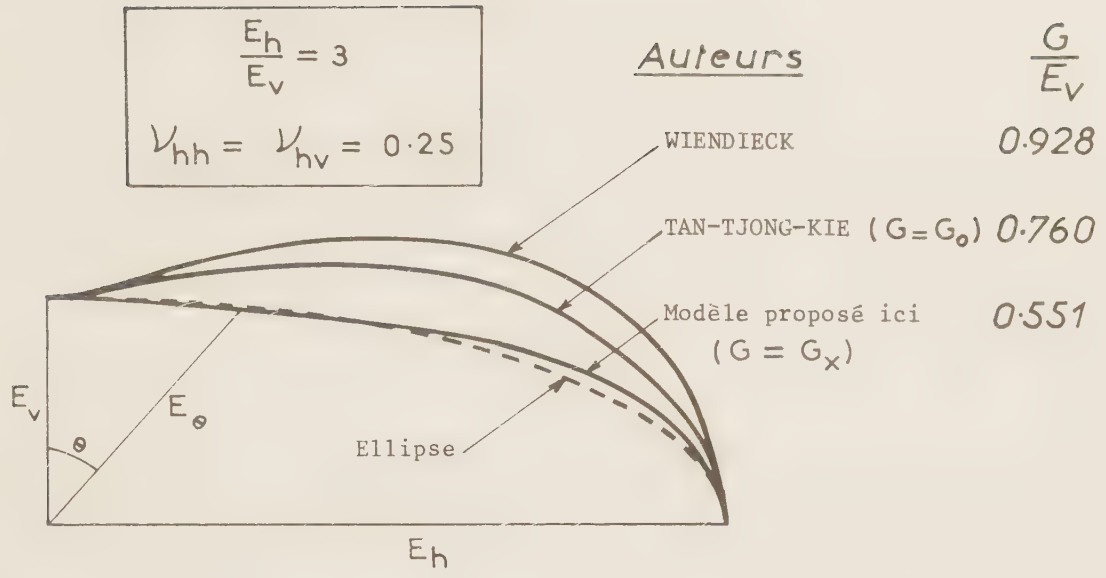


Figure 3.1. Courbe polaire des variations de E_Θ en fonction de Θ

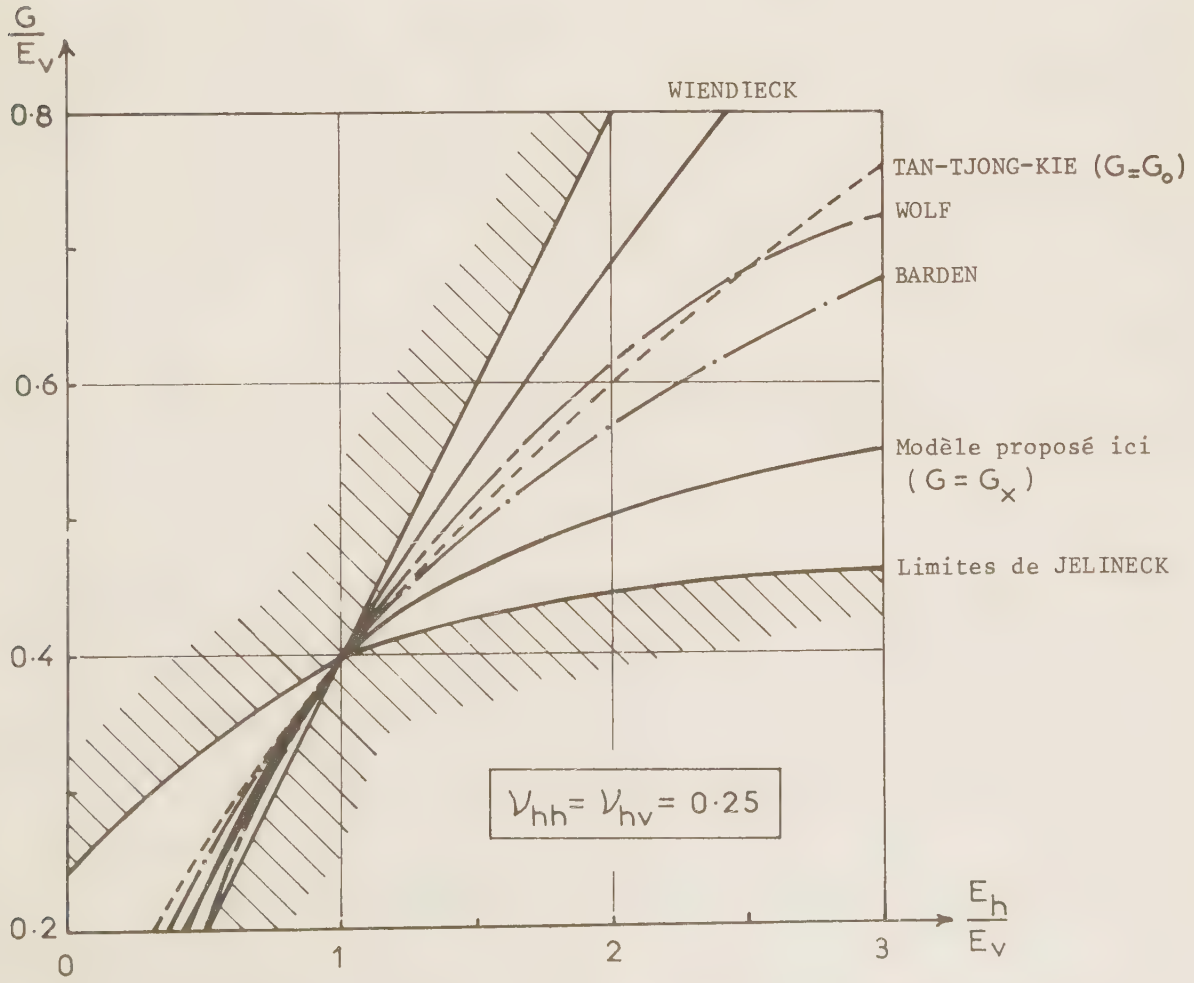


Figure 3.2. Relations entre $\frac{G}{E_v}$ et $\frac{E_h}{E_v}$ proposées par différents auteurs.

3.2. Relations entre les coefficients de POISSON

3.2.1. Etude bibliographique

TAN-TJONG-KIE propose de faire l'hypothèse $\nu_{hv} \times \nu_{hh} = \nu_e^2$ où ν_e est le coefficient de POISSON du massif isotrope ayant, à une affinité près, même comportement que le massif aélotrope bidimensionnel. Il est lié à ν', défini au § 3.1.1.b., par $\nu_e = \frac{\nu'}{1+\nu'}$. Le calcul que nous avons fait montre que cette hypothèse conduit à :

$$\boxed{\nu_{hh} = \nu_{vh} \times \sqrt{\frac{E_h}{E_v}}}$$

Or, l'incompressibilité s'exprime par (§ 2.1.2.) :

$$\begin{cases} \nu_{hh} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{E_h}{E_v} \\ \nu_{vh} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le modèle de TAN ne peut donc rendre compte de l'incompressibilité que dans le cas isotrope $\frac{E_h}{E_v} = 1$.

Il en est de même des modèles de WIENDIECK et de SUKLJE [92].

- WIENDIECK, en supposant une variation ellipsoïdale du coefficient de POISSON entre ν_{hh} et ν_{vh}, arrive à

$$\boxed{\nu_{hh} = \nu_{hv}}$$

- SUKLJE propose, sans explication, de faire l'hypothèse :

$$\boxed{\nu_{hh} = \frac{1}{2} \times (\nu_{hv} + \nu_{vh})}$$

Signalons enfin que CAQUOT [14], bien qu'utilisant les relations de l'aélotropie, a supposé :

$$\boxed{\frac{\nu_{hv}}{\nu_{vh}} = \left(\frac{E_h}{E_v}\right)^2}$$

ce qui est en contradiction avec le théorème de réciprocité selon lequel $\frac{\nu_{hv}}{\nu_{vh}} = \frac{E_h}{E_v}$ (§ 2.1.1.a.).

La figure 3.3. montre les relations proposées par ces différents auteurs.

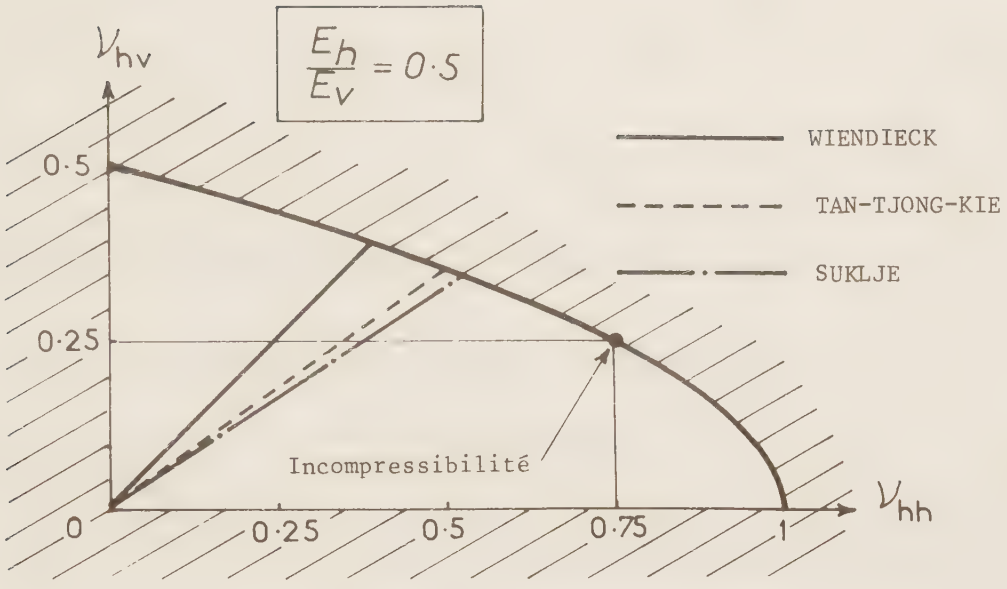


Figure 3.3. Relations entre les coefficients de POISSON proposées par différents auteurs.

3.2.2. Discussion

Les modèles précédents ne peuvent représenter un massif anisotrope incompressible, ce qui les rend très discutables et nous ne les avons pas retenu.

Nous avons donc préféré laisser ν_{hh} et ν_{vh} indépendants, même s'il est nécessaire de les "estimer" puisque leur mesure très délicate est rarement effectuée. Nous verrons d'ailleurs que dans le modèle proposé, ils n'ont guère plus d'influence sur les tassements et contraintes que ν en isotropie (§ 5.2.1.). Un choix judicieux de (ν_{hh}, ν_{vh}) permet, en outre, de rendre compte de phénomènes que ne peut représenter un modèle isotrope (§ 5.2.3.) :

- valeurs différentes de $\frac{1}{3}$ du coefficient A de pression interstitielle.
- augmentation de volume sous compression simple.

4. - PRESSION INTERSTITIELLE. CARACTERISTIQUES DRAINEES ET NON DRAINEES

4.1. Coefficients A et B de pression interstitielle

4.1.1. Expressions

Soit un échantillon soumis à un état triaxial de contrainte (σ_1, σ_3). SKEMPTON [91] a calculé dans le cas où le drainage est impossible, l'accroissement de pression interstitielle Δu dû à ($\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_3$) :

$$\Delta u = B\left[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)\right]$$

Le squelette étant isotrope, A vaut $\frac{1}{3}$ et est indépendant de la direction de l'axe de l'échantillon.

Nous avons effectué en collaboration avec CORDARY, le calcul de Δu dans le cas où le squelette est aélotrope et quand l'axe de l'échantillon fait un angle θ quelconque avec l'axe d'aélotropie.

En supposant comme SKEMPTON les grains incompressibles, la diminution de volume du squelette est due à la diminution de volume du fluide interstitiel (en général air et eau); nous avons alors obtenu :

$$\Delta u = B\left[\Delta\sigma_3 + A_\theta(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)\right]$$

$$B = \frac{1}{1 + \dfrac{n\,C_f\,E_h}{2(1-\nu_{hh}-2\nu_{hv}) + \dfrac{E_h}{E_v}}}$$

$$A_\theta = \frac{\sin^2\theta(1-\nu_{hh}-\nu_{hv}) + \cos^2\theta(1-2\nu_{vh})\dfrac{E_h}{E_v}}{\dfrac{E_h}{E_v}(1-4\nu_{vh}) + 2(1-\nu_{hh})}$$

n est la porosité et C_f la compressibilité du fluide.

Lorsque le sol est saturé, C_f est la compressibilité de l'eau, qu'on peut négliger devant celle du squelette et B = 1. Il faut remarquer encore que B ne dépend pas de θ.

Un triaxial sur un échantillon à axe vertical donne :

$$(\theta = 0) \qquad A_\theta = A_o \qquad A_o = \frac{\frac{E_h}{E_v}\left(1 - 2\nu_{vh}\right)}{\frac{E_h}{E_v}\left(1 - 4\nu_{vh}\right) + 2\left(1 - \nu_{hh}\right)}$$

Sur un échantillon à axe horizontal :

$$(\theta = 90°) \qquad A_\theta = A_{90} \qquad A_{90} = \frac{1 - \nu_{hh} - \nu_{vh}\frac{E_h}{E_v}}{\frac{E_h}{E_v}\left(1 - 4\nu_{vh}\right) + 2\left(1 - \nu_{hh}\right)}$$

On a pu constater que :

$$\boxed{\begin{array}{c} A_\theta = A_{90}\sin^2\theta + A_o\cos^2\theta \\ A_o + 2A_{90} = 1 \end{array}}$$

Ces résultats ont également été obtenus par URIEL [96] et PICKERING [78].

4.1.2. Valeurs de A_o dans le cas des sols

Compte tenu des limites imposées aux coefficients de POISSON et des valeurs $\frac{E_h}{E_v}$, nous avons alors cherché qu'elles valeurs pouvait prendre A_o dans les sols. A_θ se déduit facilement de A_o par :

$$A_\theta = \frac{1 - A_o}{2}\sin^2\theta + A_o\cos^2\theta$$

Dans un plan à $\frac{E_h}{E_v}$ constant, les courbes A_o = cste sont des droites passant toutes par le point représentant l'incompressibilité (figures 4.1. et 4.2.). La condition d'incompressibilité sous pression isotrope conduit à une valeur indéterminée de A_o.

Si nous soumettons, par ailleurs, un échantillon cubique à axe vertical à des compressions verticales σ_v ou horizontales σ_h, les variations de volume sont respectivement :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_v}{E_v}\left(1 - 2\nu_{vh}\right)$$

ou

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_h}{E_h}\left(1 - \nu_{hh} - \nu_{hv}\right)$$

La première est nulle pour $\nu_{vh} = 0.5$ qui correspond à $A_o = 0$ et la seconde pour $\nu_{hh} + \nu_{hv} = 1$, soit $A_o = 1$.

Le domaine du plan (ν_{hh}, ν_{vh}) accessible aux coefficients de POISSON se compose de trois parties (figures 4.1. et 4.2.):

1 - Entre les droites $A_o = 0$ et $A_o = 1$, sous compression simple, le squelette subit des diminutions de volume quelle que soit la direction de la contrainte.

2 - Pour A_o négatif, le squelette se comprime sous σ_h, mais il se dilate sous une compression verticale.

3 - Pour A_o supérieur à 1, on observe une diminution de volume sous σ_v, mais une augmentation sous σ_h.

La valeur $A_o = \frac{1}{3}$ correspond à une loi décomposable c'est-à-dire telle qu'un état de contrainte isotrope ou déviateur entraîne un état de déformation respectivement isotrope ou déviateur.

On constate, enfin, que pour $\frac{E_h}{E_v}$ compris entre 0.5 et 3 et pour la plupart des valeurs possibles pour (ν_{hh}, ν_{vh}), A_o reste entre - 1 et 1.5 environ. Cet intervalle est en accord avec les valeurs habituelles observées dans les sols.

Notons qu'il convient de ne pas comparer des valeurs mesurées à la rupture (A_f) avec celles obtenues ici, le matériau étant alors très loin d'un état élastique.

MITCHELL [73] a mesuré Δu en début d'essai (argile anisotrope) et donne $A_o = 0.25$ et $A_{90} = 0.40$. Il semble ignorer la relation $A_o + 2\,A_{90} = 1$, mais nous constatons qu'elle est très bien vérifiée par ses résultats (5 % près).

4.2. Relations entre les modules drainés et non drainés

Si le sol est saturé, on peut, à partir des résultats précédents, obtenir les relations entre les modules E_h et E_v mesurés lors d'essais drainés, et les modules E_{hu} et E_{vu} déterminés par des essais non drainés (CORDARY). E_{hu}, E_{vu}, ν_{hhu} et ν_{hvu} caractérisent le comportement du milieu biphasique (sol + eau). Ce milieu étant incompressible (saturation), les coefficients de POISSON valent :

$$\nu_{hhu} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{E_{hu}}{E_{vu}} \qquad \nu_{hvu} = \frac{1}{2}\cdot\frac{E_{hu}}{E_{vu}} \qquad \left(\text{et } \nu_{vhu} = \frac{1}{2}\right)$$

Les expressions de E_{hu}, E_{vu} et $\frac{E_{hu}}{E_{vu}}$ sont :

$$E_{hu} = \frac{2\left(1-\nu_{hh}-2\nu_{hv}\right)+\frac{E_h}{E_v}}{1-\left(\nu_{hh}+\nu_{hv}\right)^2-2\nu_{hv}+\frac{E_h}{E_v}} E_h$$

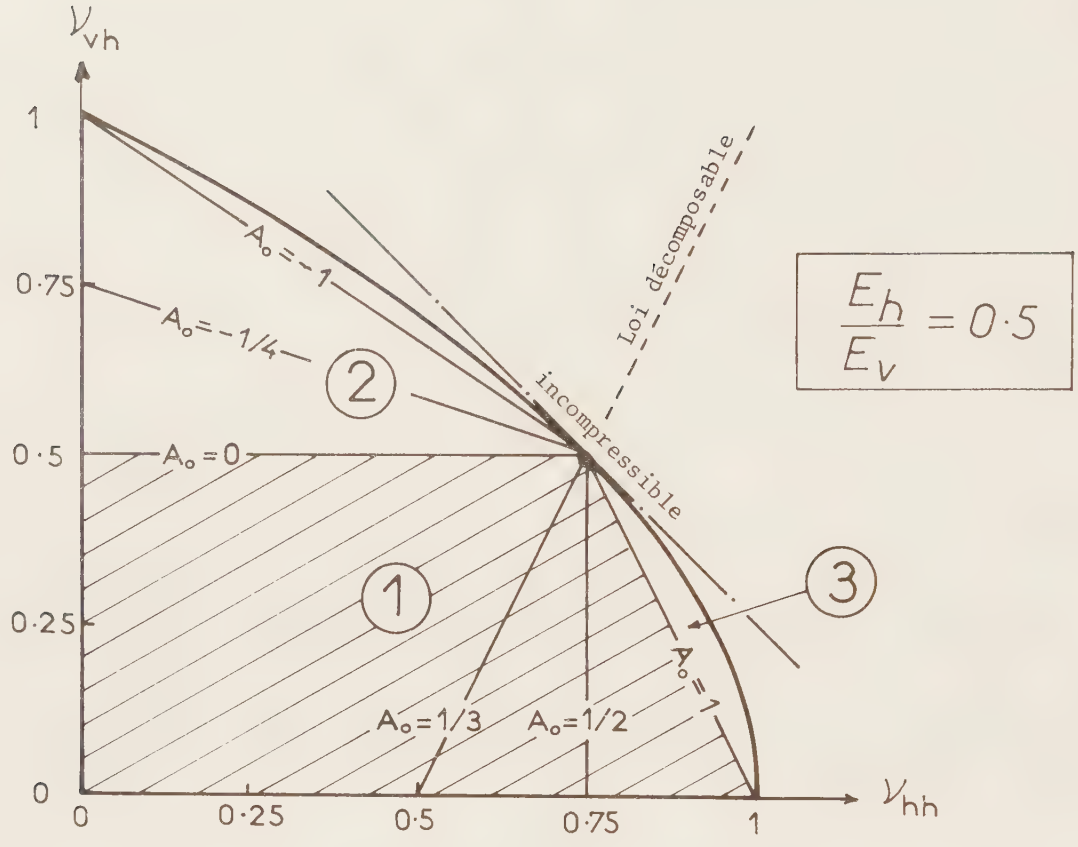
$$E_{vu} = \frac{2\left(1-\nu_{hh}-2\nu_{hv}\right)+\frac{E_h}{E_v}}{2\left(1-\nu_{hh}\right)\frac{E_h}{E_v}-4\nu_{hv}^2} E_h$$

$$\frac{E_{hu}}{E_{vu}} = \frac{2\left(1-\nu_{hh}\right)\frac{E_h}{E_v}-4\nu_{hv}^2}{1-\left(\nu_{hh}+\nu_{hv}\right)^2-2\nu_{hv}+\frac{E_h}{E_v}}$$

Si on admet, en outre, que $G = G_u$, la relation proposée en 3.2.2.d. n'est pas satisfaite par (G_u, E_{hu}, E_{vu}, ν_{hvu}). Ce point mériterait d'être approfondi.

On montre que quelles que soient les valeurs données à (E_h, E_v, ν_{hh}, ν_{hv}), le rapport $\frac{E_{hu}}{E_{vu}}$ reste toujours inférieur à 2, ce qui était prévisible puisque le milieu biphasique est incompressible (§ 2.1.2.).

⟶ On ne peut donc, sur des essais non drainés, observer une anisotropie de module, de degré supérieur à 2.



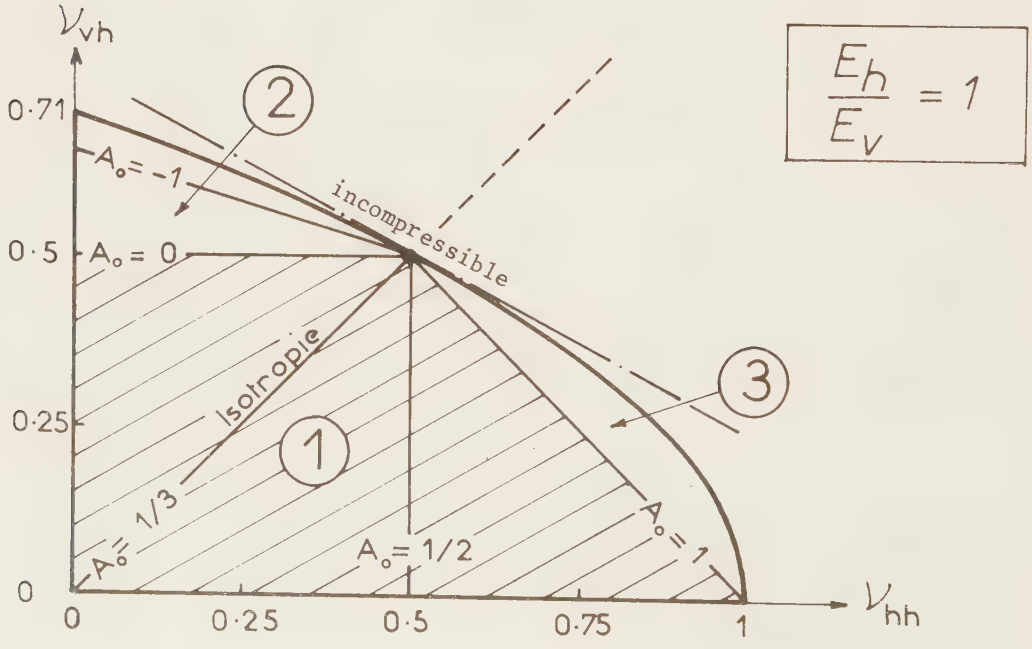


Figure 4.1. Valeurs possibles du coefficient A_o de pression interstitielle.

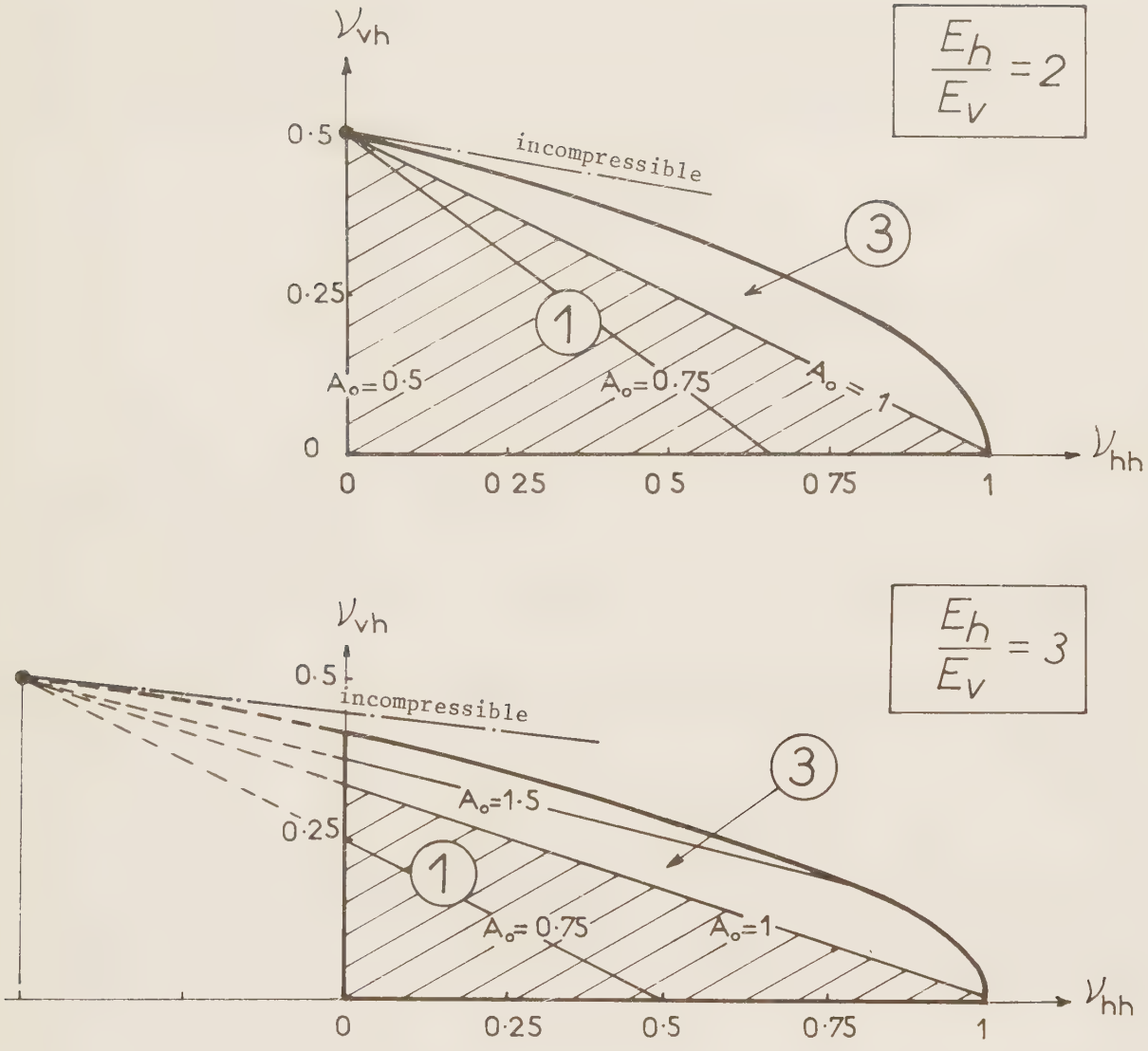


Figure 4.2. Valeurs possibles du coefficient A_o de pression interstitielle.

(1) - Sous compression simple, le sol subit une diminution de volume quelle que soit la direction de la contrainte ($0 < A_o < 1$).

(2) - Le sol se comprime sous σ_h mais se dilate sous une compression verticale ($A_o < 0$).

(3) - Le sol subit une diminution de volume sous σ_v et une augmentation sous σ_h ($A_o > 1$).

5. - APPLICATION ET INTERET DU MODELE PROPOSE

Le modèle anisotrope proposé se caractérise par :

. Deux modules d'YOUNG E_h et E_v ;

. Deux coefficients de POISSON ν_{hh} et ν_{vh} (ou ν_{hv}).

Le module de cisaillement G se déduit de ces paramètres par la relation du § 3.2.2.d. et tous les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec cette valeur G_x de G.

5.1. Mesure des paramètres E et ν

5.1.1. Méthodes

a - Essais classiques

La méthode la plus naturelle consiste à effectuer des essais triaxiaux sur des échantillons à axe vertical et horizontal. Ils donnent E_h, E_v et, plus difficilement, ν_{hh} et ν_{vh} (mesure des variations de volume § 4.1.2.). Signalons, en outre, deux variantes :

● SILVEIRA [89] et [90] propose d'étendre la méthode mise au point pour l'isotropie.

Les essais triaxiaux sont effectués sous différentes contraintes latérales σ_3. On a, suivant que les échantillons sont verticaux ou horizontaux, les relations (§ 2.1.1.a.) :

$$\sigma_1 = 2\nu_{vh}\sigma_3 + E_v\varepsilon_1$$

et

$$\sigma_1 = \left(\nu_{hh} + \frac{E_h}{E_v}\nu_{vh}\right)\sigma_3 + E_h\varepsilon_1$$

Une étude statistique (moindres carrés) des résultats expérimentaux, avec des relations de la forme $\sigma_1 = a + b\sigma_3 + c\varepsilon_1$, permettrait d'obtenir E_v, ν_{vh}, et E_h, ν_{hh}.

● TAN-TJONG-KIE, après les essais triaxiaux donnant E_v et E_h, suggère d'effectuer des essais oedométriques pour déterminer ν_{vh} et ν_{hh}. Les relations contraintes-déformations (§ 2.1.1.a.) montrent que les modules oedométriques d'échantillons à axe vertical ou horizontal sont respectivement C et A, d'où :

$$\begin{cases} E_v^{oed} = C = E_v \dfrac{1 - \nu_{hh}}{1 - \nu_{hh} - 2\nu_{vh}^2 \cdot \dfrac{E_h}{E_v}} \\ \text{et} \\ E_h^{oed} = A = E_h \dfrac{1 - \nu_{vh}^2 \dfrac{E_h}{E_v}}{(1 + \nu_{hh})\left(1 - \nu_{hh} - 2\nu_{vh}^2 \cdot \dfrac{E_h}{E_v}\right)} \end{cases}$$

notons que $\dfrac{E_h^{oed}}{E_v^{oed}} = \dfrac{E_h}{E_v} \cdot \dfrac{1 - \nu_{vh}^2 \dfrac{E_h}{E_v}}{1 - \nu_{hh}^2}$

Connaissant E_h et E_v, la mesure de E_h^{oed} et E_v^{oed} permet le calcul de ν_{hh} et ν_{vh}.

Outre un nombre d'essais importants, cette méthode, comme nous avons pu le constater, nécessite une précision pratiquement impossible à atteindre sur la mesure des modules.

b - Dilatomètres de sondage

La mesure in-situ de E_h et E_v peut être effectuée en utilisant un dilatomètre de sondage dont l'axe doit être perpendiculaire à l'axe d'aélotropie (MARIO COLL ALAS [66]. Elle n'a, de ce fait, été réalisée que dans les roches (KAWAMOTO [55]).

Notons, cependant qu'un essai pressiométrique vertical permet la mesure in-situ de $G_h = \dfrac{E_h}{2(1 + \nu_{hh})}$.

c - Triaxial véritable (TTA)

Le véritable triaxial peut apporter une nouvelle solution à la détermination des paramètres de l'aélotropie. Les essais en déformation plane ($\varepsilon_y = 0$) préconisés par CHOWDHURY et KING sont résumés ci-dessous (z est la direction d'aélotropie).

. Essai à σ_z constant

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{d\sigma_y}{d\sigma_x} = \nu_{hh} & \Longrightarrow \nu_{hh} \\ \dfrac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} = \dfrac{E_h}{1-\nu_{hh}^2} & \Longrightarrow E_h \\ \dfrac{d\sigma_x}{d\varepsilon_y} = \dfrac{-E_h}{\nu_{hv}(1+\nu_{hh})} & \Longrightarrow \nu_{hv} \end{array}\right.$$

. Essai à σ_x constant

$$\frac{d\sigma_z}{d\varepsilon_y} = \frac{E_v^2}{E_v - \nu_{vh}^2 E_h} \Longrightarrow E_v$$

d - Mesure indirecte de $\dfrac{E_h}{E_v}$

Les méthodes précédentes demandent beaucoup de temps (mesures suivant deux directions). LUSHNIKOV et VULIS [65] ont montré, après des tests effectués sur un grand nombre d'échantillons d'argile remaniés ou non, que :

$$\frac{E_h}{E_v} = \frac{R_h}{R_v}$$

où R est la résistance à la pénétration d'un cône (poids 300 g, angle au sommet 30°), calculée pour la portion linéaire de la relation entre la charge et le carré de la profondeur d'enfoncement du cône.

Cette relation mériterait d'être confirmée par d'autres essais, car elle permet une détermination simple et rapide du degré d'anisotropie.

Dans le cas où la pression interstitielle intervient, il est intéressant de connaître en outre A_Θ ; ce coefficient peut théoriquement être calculé à partir des 4 paramètres du modèle, mais il dépend beaucoup des coefficients de POISSON dont la mesure est très délicate. Il sera donc plutôt, comme les modules E_{hu} et E_{vu}, déterminé par un essai.

Notons que les essais triaxiaux sur des échantillons verticaux et horizontaux peuvent permettre de vérifier que $A_o + 2\,A_{90} = 1$ (§ 4.1.1.), mais les mesures de pression interstitielle doivent être faites avec soin ; JOSSEAUME [54] a récemment montré l'influence des vitesses de déformation sur les résultats, ainsi que les différences importantes entre les valeurs obtenues suivant que la prise de pression se fait au centre ou à la base de l'échantillon.

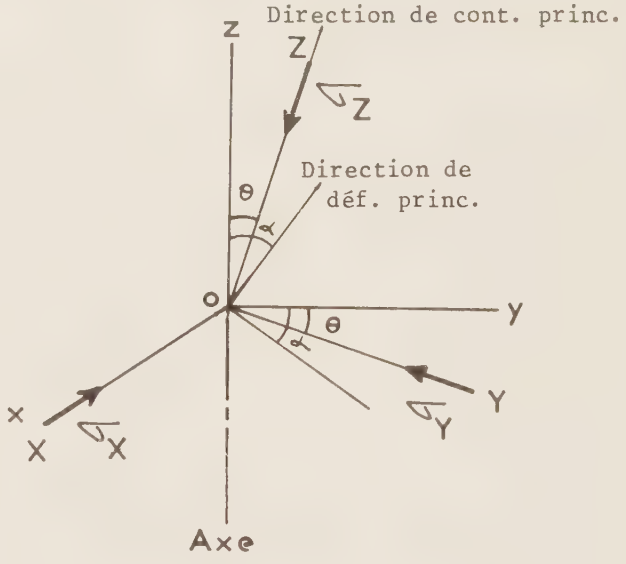
5.1.2. Trièdres principaux des contraintes et déformations

Il serait très utile d'effectuer des essais triaxiaux sur des échantillons dont l'axe est incliné de θ par rapport à l'axe d'aëlotropie oz, pour préciser, en particulier, la courbe de variation de E_θ.

Il faut remarquer qu'alors, les échantillons initialement cylindriques ne resteront pas de révolution ("tonneaux" habituels), puisque les trièdres principaux des contraintes et des déformations ne coïncident pas si θ est différent de 0 ou $\frac{\pi}{2}$.

Si σ_x, σ_y et σ_z sont les contraintes principales, les contraintes dans le repère (x, y, z) valent :

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_X \\ \sigma_y = \sigma_Y \cos^2\theta + \sigma_Z \sin^2\theta \\ \sigma_z = \sigma_Z \cos^2\theta + \sigma_Y \sin^2\theta \\ \tau_{yz} = (\sigma_Y - \sigma_Z) \sin\theta \cos\theta \end{cases}$$



Ces contraintes sont liées aux déformations (ε_x, ε_y, ε_z et γ_{yz}) par les relations du § 2.1.1.a.

Or, l'angle α entre les déformations principales dans le plan yoz et les axes oz (et oy) est donné par :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{yz}}{\varepsilon_y - \varepsilon_z}$$

Dans le cas du triaxial d'axe OZ, on a $\sigma_z = \sigma_1$ et $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_3$, d'où, en posant $r = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{E_h}{G} \frac{1 - r\operatorname{tg}\theta}{1 - \nu_{hh} + \frac{E_h}{E_v}\left(2\nu_{vh} - r\nu_{vh} - r\right) + \operatorname{tg}^2\theta\left[r - \nu_{hh} + \frac{E_h}{E_v}\left(r\nu_{vh} - 1\right)\right]}$$

$\alpha - \theta$ représente l'angle entre les directions des contraintes principales et celles de déformations principales. GRESZCZUK [42] a mesuré sur un matériau artificiel de degré d'anisotropie 3 une différence $\alpha - \theta$ atteignant 15° pour $\theta = 20°$.

Cette remarque est surtout intéressante en mécanique des roches où, dans un essai de compression simple, on peut mesurer les déformations à l'aide de jauges. Il est alors nécessaire d'utiliser 3 jauges pour déterminer les déformations principales (Tracer le cercle de Mohr).

On peut être également amené à abandonner l'hypothèse selon laquelle un échantillon de sol soumis à un essai triaxial se déforme en restant de révolution ("Tonneau").

SAADA et ZAMANI [84] ont cru résoudre le problème en n'utilisant que des échantillons d'axe parallèle à l'axe d'aélotropie. Mais les états de contraintes appliqués (compression plus torsion) sont tels que les contraintes principales font, avec cet axe, un angle différent de 0 ou 90° ; dans ces conditions, l'échantillon pendant la déformation ne reste pas de révolution.

5.2. Applications

5.2.1. Calcul des tassements

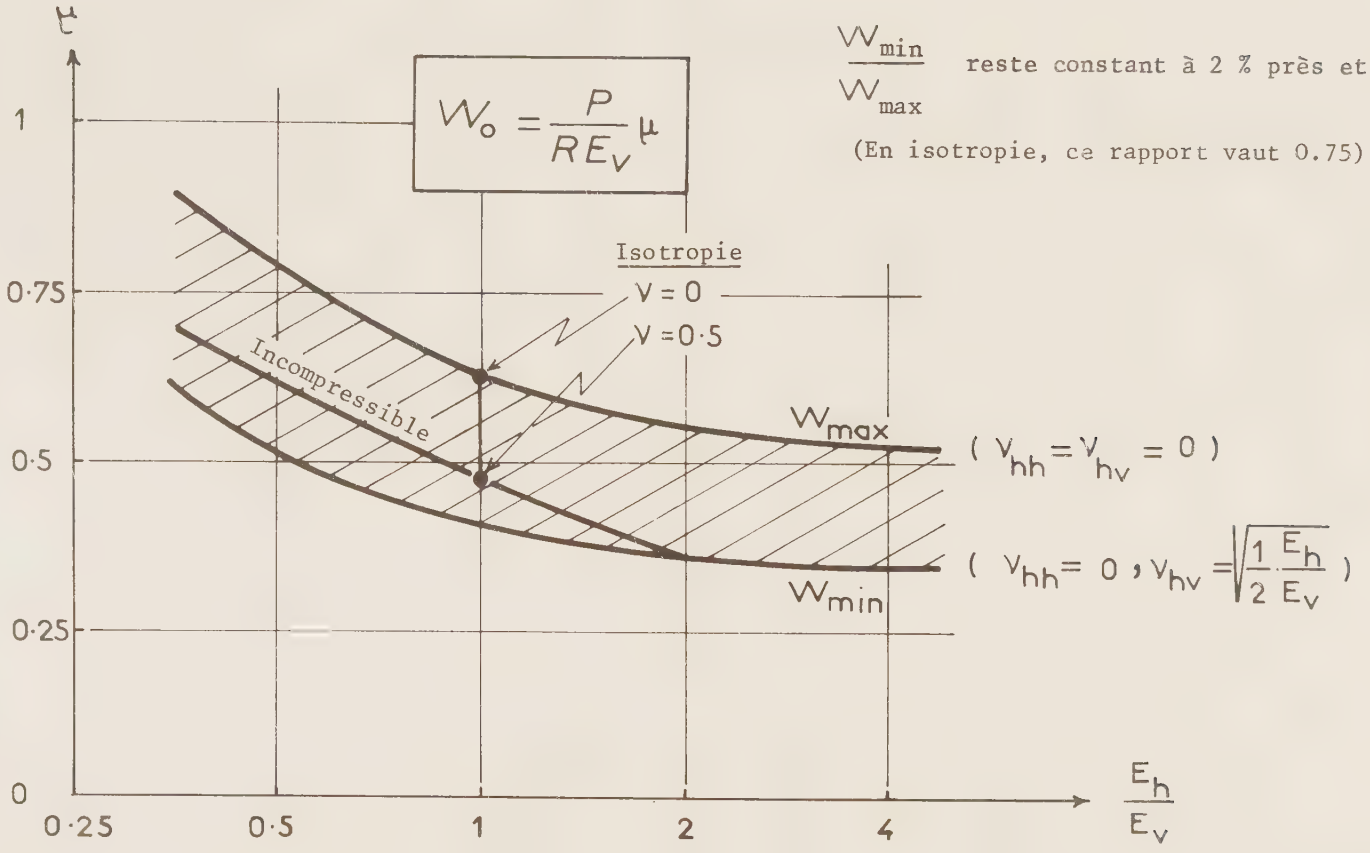
Appelons w_o le tassement du centre d'un cercle uniformément chargé reposant sur un massif infini.

La figure 5.1. donne, pour chaque valeur de $\frac{E_h}{E_v}$, la plus petite et la plus grande valeur de w_o permises par (ν_{hh}, ν_{vh}), ainsi que le tassement du massif incompressible.

Notons d'abord que $\frac{w_{o\min}}{w_{o\max}}$ reste, à 2 % près, égal à 0.65 ; en isotropie, ce rapport vaut 0.75. L'influence des coefficients de POISSON sur les tassements, que l'on peut encore voir sur la figure 5.2., n'est donc pas beaucoup plus forte qu'en isotropie.

La figure 5.1. montre clairement que l'erreur commise sur les tassements peut être considérable si on ne tient pas compte de l'anisotropie constatée en général dans les sols. Ainsi, pour un massif anisotrope incompressible, l'erreur est de 25 % par défaut si $\frac{E_h}{E_v} = 0.5$ et, par excès si $\frac{E_h}{E_v} = 2$.

Figure 5.1. Tassement du centre du cercle uniformément chargé reposant sur un massif semi-infini. Modèle aélotrope proposé pour les sols ($G = G_x$).



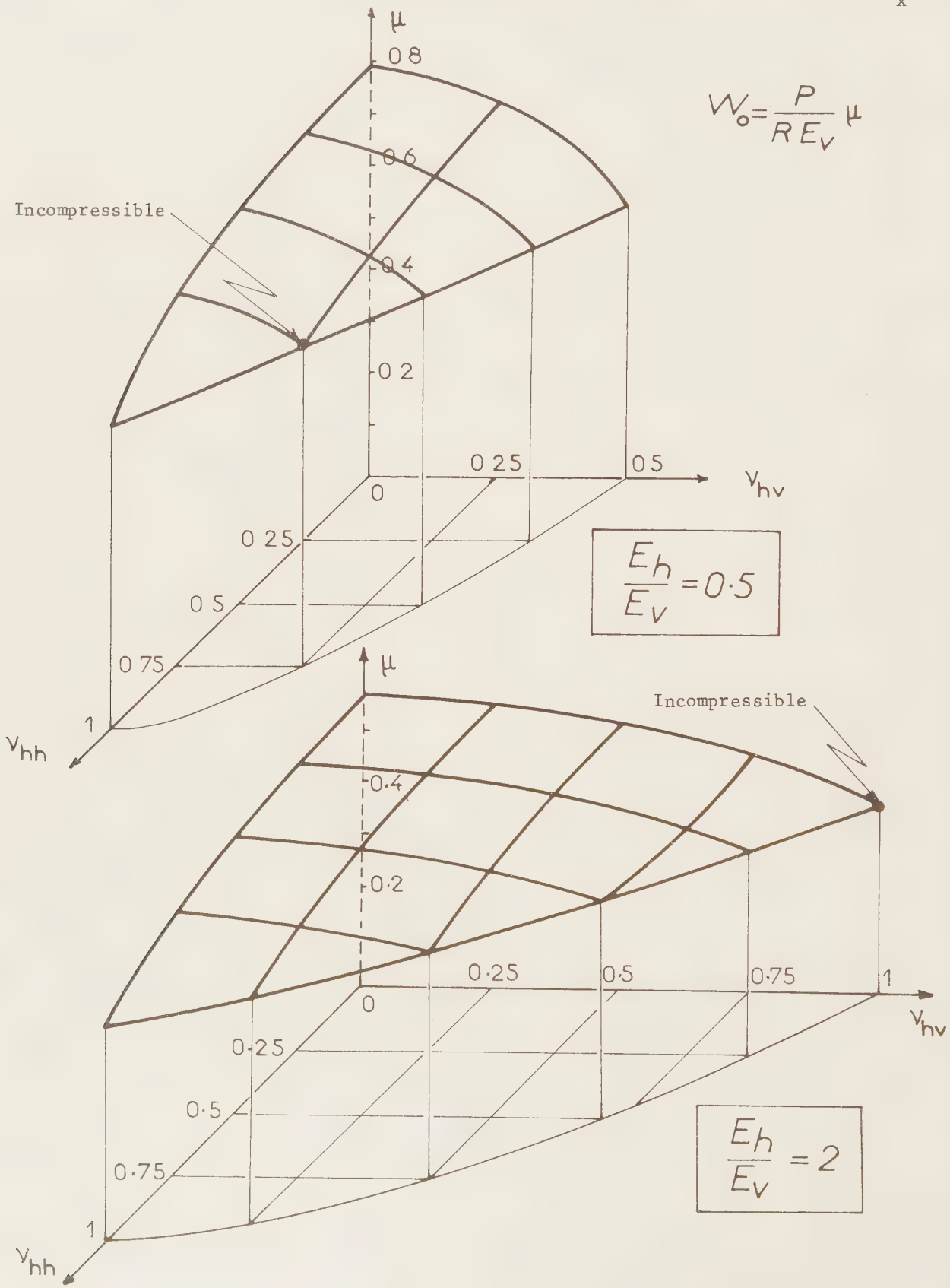
$\frac{W_{min}}{W_{max}}$ reste constant à 2 % près et égal à 0.65.

(En isotropie, ce rapport vaut 0.75).

($\nu_{hh} = \nu_{hv} = 0$)

($\nu_{hh} = 0$, $\nu_{hv} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{E_h}{E_v}}$)

Figure 5.2. Tassement du centre du cercle uniformément chargé, reposant sur un massif semi-infini. Modèle aélotrope proposé pour les sols ($G = G_x$).



5.2.2. Calcul des contraintes

Nous avons tracé sur les figures 5.3. et 5.4. les courbes des répartitions de contraintes sous une charge concentrée, pour différents $\frac{E_h}{E_v}$, et on peut remarquer l'influence considérable de l'anisotropie sur les distributions de contraintes.

Le modèle rend parfaitement compte des phénomènes observés :

- Les courbes pour $0.5 < \frac{E_h}{E_v} < 1$ correspondant aux sables (§ 2.1.3.a.) montrent bien la concentration de contraintes sous le charge observée dans ces sols (TERZAGHI [94], MORGAN et GERRARD [74]).
  Dans le modèle de FROELICH(§ 1.3.2.), les sables correspondraient à un facteur de concentration de 4. Les courbes de répartition de σ_z à z constant ainsi obtenues se retrouvent ici pour $\frac{E_h}{E_v}$ voisin de 0.6.

- Dans les argiles surconsolidées ($\frac{E_h}{E_v} > 1$), la courbe de σ_z est, au contraire, plus plate que celle proposée par BOUSSINESQ.

Nous avons pu montrer que le modèle de WESTERGAARD (§ 1.3.1.) permettant de représenter ce phénomène, était un cas particulier du notre avec $\frac{E_h}{E_v} \to \infty$, $\nu_{hh} = \nu_{vh} = 0$. Un calcul fait avec $\frac{E_h}{E_v} = 1000$ et $\nu_{hh} = \nu_{vh} = 0$ a donné les mêmes valeurs de σ_z que celles dues à WESTERGAARD et calculées par FADUM [32] avec $\nu = 0$.

5.2.3. Pression interstitielle. Variation de volume

La formule $\Delta u = B\left[\Delta\sigma_3 + A\left(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3\right)\right]$ fut établie en élasticité isotrope et donc avec $A = \frac{1}{3}$. Cependant, pour tenir compte des valeurs trouvées dans les sols, SKEMPTON propose de l'appliquer encore avec A différent de $\frac{1}{3}$, ce qui est en contradiction avec les hypothèses d'élasticité isotrope.

Par contre, nous avons montré (§ 4.1.2.) qu'en aélotropie, les valeurs de A pouvaient être différentes de $\frac{1}{3}$ et qu'elles recouvraient bien le domaine des A mesurés dans les sols.

Figure 5.3. Répartition des contraintes σ_z dans un massif semi-infini sous l'action d'une charge concentrée P.
Modèle aélotrope proposé pour les sols ($G = G_x$).

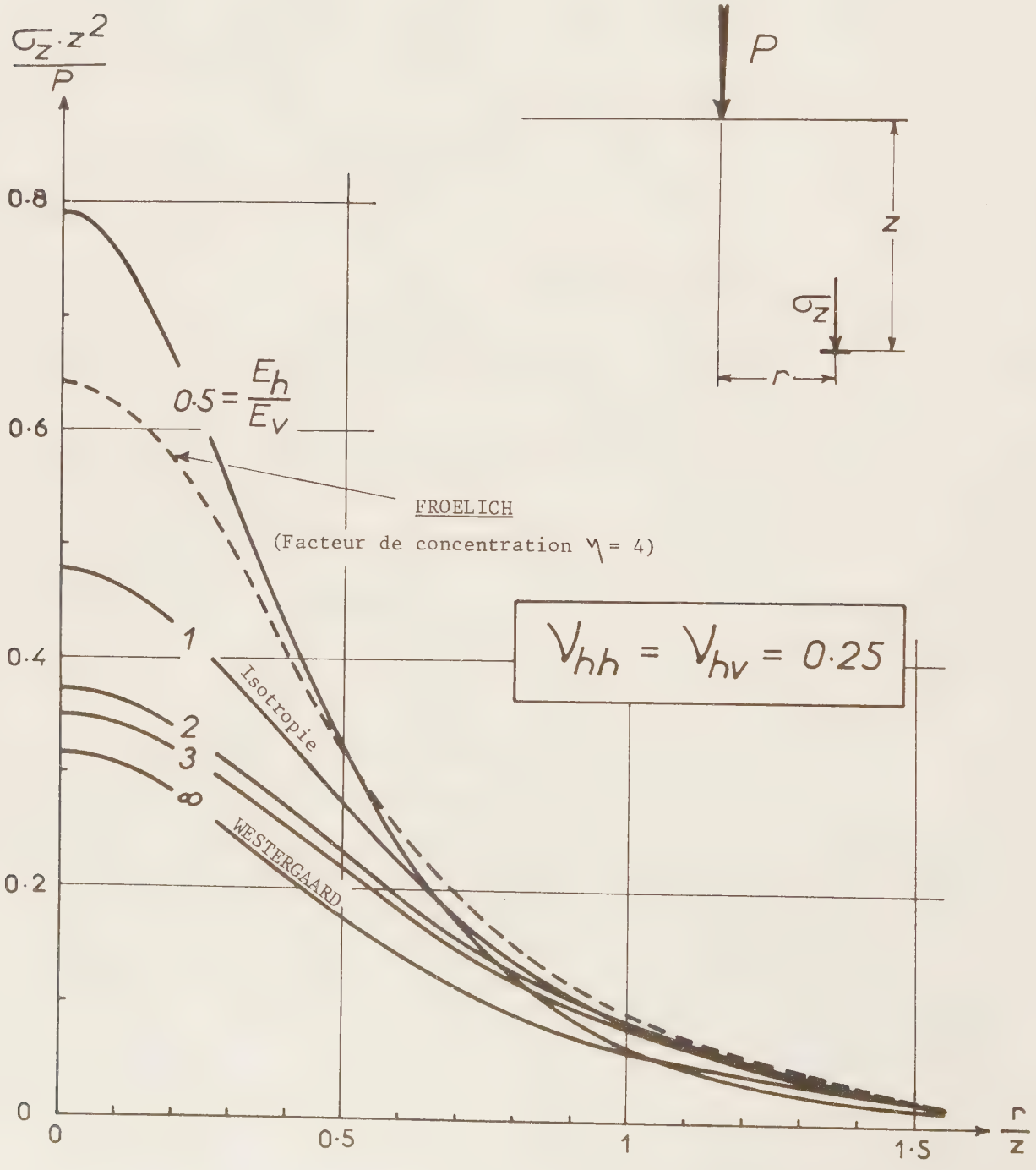
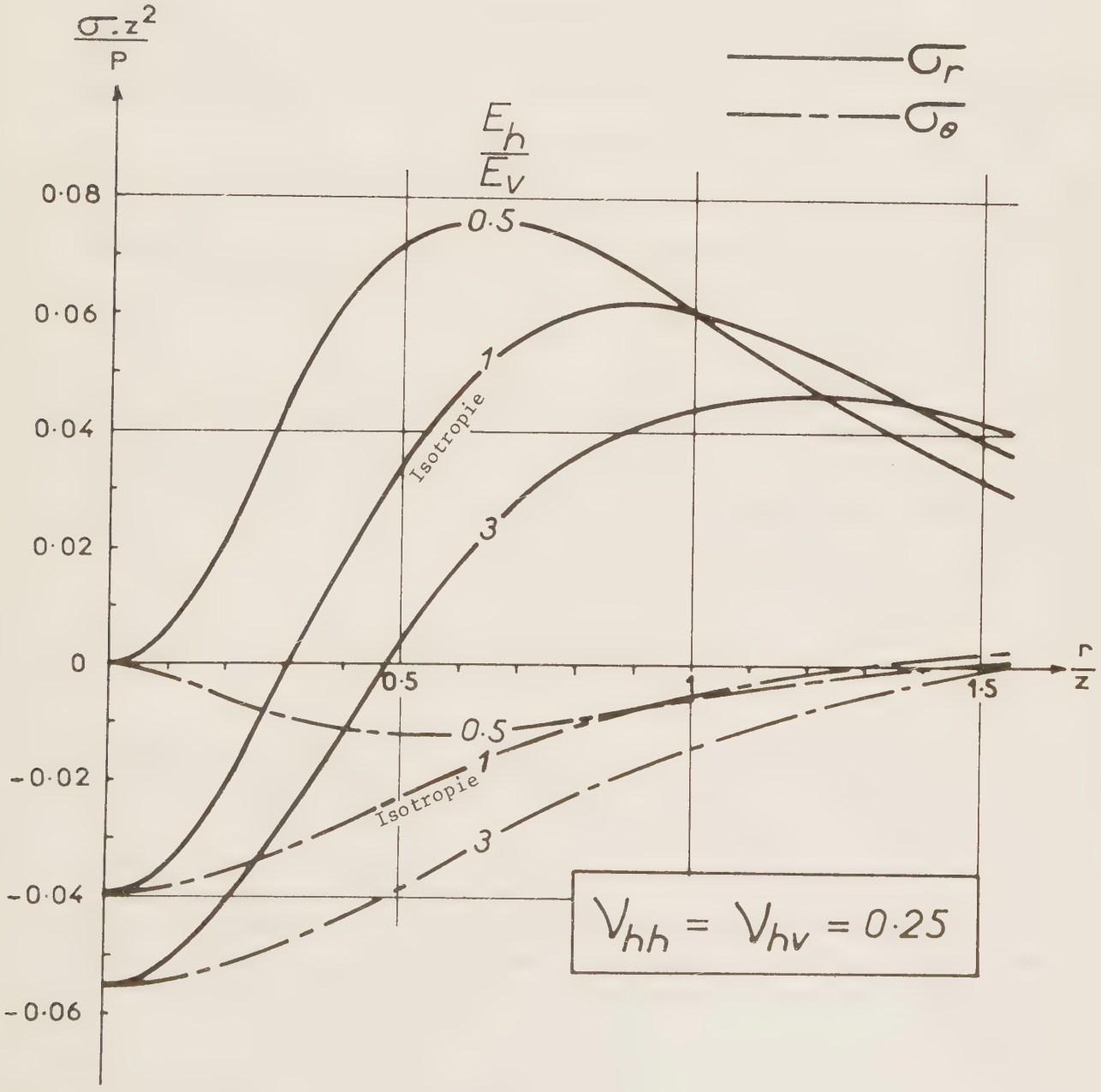


Figure 5.4. Répartition des contraintes σ_r et σ_θ dans un massif semi-infini sous l'action d'une charge concentrée P.
Modèle aélotrope proposé pour les sols ($G = G_x$).



Nous savons, d'autre part, que certains sols (sable dense, argile très surconsolidée) peuvent se dilater sous une compression simple. Nous avons vu (§ 4.1.2.) que l'aélotropie pouvait rendre compte de ce phénomène et que les valeurs de A étaient liées à la possibilité qu'a le squelette de se dilater ou de se contracter.

5.2.4. Massifs stratifiés

a - roches stratifiées

SALAMON [85] a montré qu'un massif stratifié, divisé par des plans parallèles, en couches orthotropes de révolution ou à fortiori isotropes, et dont l'épaisseur et les propriétés varient régulièrement avec la profondeur, se comportait à une grande échelle comme un massif aélotrope.

Il donne l'expression des 5 paramètres de ce massif équivalent en fonction des épaisseurs et des propriétés des couches.

Si donc les dimensions de l'ouvrage sont grandes devant l'épaisseur des couches, le massif peut être globalement traité par l'aélotropie.

b - terre armée

HARRISON et GERRARD [46] ont utilisé les expressions de SALAMON pour un massif isotrope (E_1, ν_1) renforcé par des couches parallèles d'un matériau très fin et peu déformable (E_2, ν_2). Si S est l'épaisseur totale de ce matériau rencontrée sur une hauteur L, la terre armée correspond au cas où $t = \frac{S}{L}$ tend vers 0.

Trois cas se présentent :

- $\frac{t\,E_2}{E_1} \longrightarrow 0$ Le renforcement n'a aucun effet ; le massif équivalent est isotrope (E_1, ν_1).

- $\frac{t\,E_2}{E_1} \longrightarrow \infty$ Ce cas limite est celui étudié par WEESTERGARD, dont on retrouve ici les expressions.

- Le cas général est celui où $\frac{t\,E_2}{E_1}$ tend vers une limite finie K.

Le massif équivalent est aélotrope et HARRISON et GERRARD ont calculé ses paramètres qui s'expriment en fonction de 4 quantités ν_1, ν_2, E_1 et K. Il existe donc une relation entre les 5 paramètres du massif, qui est :

$$\frac{G}{E_v} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \nu_{hh} - \nu_{hv}}{1 - \nu_{hh} - 2\nu_{hv}\nu_{vh}}$$

Cette relation n'est pas celle proposée en 3.2.2.d. pour un sol homogène ; le module E_θ du massif équivalent ne décrit donc pas, en général, une ellipse. Les expressions du § 2.3. peuvent cependant être utilisées, avec la valeur de G ci-dessus, pour calculer les tassements et contraintes dans le massif équivalent ; on peut en déduire les contraintes dans les couches de sol et dans le matériau de renforcement.

Notons que dans la pratique, ces résultats s'appliquent même quand l'épaisseur du matériau n'est pas nulle mais petite et quand son module E_2 n'est pas infini mais grand devant celui du sol E_1.

Ils pourraient donc être particulièrement intéressants pour les massifs de terre armée.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Deuxième Partie

1 AAS G. "Vane test for investigation of anisotropy of undrained shear strength of clays".
Conference Geotechnique, Oslo, 1967.

2 ABSI E. "Recherche sur la Rhéologie des Argiles".
Annales de l'I.T.B.T.P., n° 213, Septembre 1965, p 1139-1145.

3 ANGLES D'AURIAC P. Cours de D.E.A. Mécanique des Sols.
Université de Grenoble.

4 ARTHUR J.R.F. et MENZIES B.K. "Inherent anisotropy in a sand".
Geotechnique 22, n° 1, 1972, p 115-128.

5 ARTHUR J.R.F. et PHILLIPS A.B. Discussion "Inherent anisotropy in a sand".
Geotechnique 22, n° 3, (1972), p 537-541.

6 BARDEN L. "Stresses and displacements in a cross-anisotropic soil".
Geotechnique 13, n° 3, (1963), p 198-210.

7 BARDEN L. "The influence of structure on deformation and failure in clay soil".
Geotechnique 22, n° 1, (1972), p 159-163.

8 BERRY D.S. et FAIRHURST C. "Influence of Rock Anisotropy and Time-Dependent Deformation on the Stress-Relief and High-Modulus Inclusion Techniques of in situ Stress Determination".
Testing Techniques for Rock Mechanics. A.S.T.M. S.T.P. 402, Am. Soc. Testing Mats ; 1966, p 190-206.

9 BIAREZ J. "Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et matériaux pulvérulents".
Thèse d'Etat (Grenoble), 1962.

10 BISHOP A.W., WEBB D.L. et LEWIN P.I. "Indisturbed samples of London clay from the Ashford common shaft : Strength-Effective stress relationships".
Geotechnique 15, 1, 1965, p 1-49.

11 BJERRUM L. "Progressive failure in slopes of overconsolidated platic clay and clay shales".
A.S.C.E., SM 5, Sept 1967, p 1-49.

12 BOEHLER J.P. et GIROUD J.P. "Measurement of soil Anisotropy".
Ninth Annual Symposium on Engineering Geology and Soils Engineering (Boise, Idaho, April 1971), p 175-187.

13 BRANDT E.W. "Concentration factors for stress distribution in soils".
Sols Soils, n° 21, 1968, p 11-20.

14 CAQUOT A. et KERISEL J. "Traité de Mécanique des Sols".
Edit. 1966. Gauthier-Villars, Paris.

15 CHOWDHURY R.N. et KING G.J.W. Discussion, Geotechnique 21, n° 2, Juin 1971, p 181-182.

16 CHOWDHURY R.N. et KING G.J.W. Discussion "Anisotropic elastic parameters for soil".
Geotechnique, 22, n° 1, (1972), p 183.

17 CORDARY D. "Contribution à l'étude du tassement des fondations superficielles".
Thèse, Grenoble, Juin 1973.

18 COON M.D. et EVANS R.J. "Recoverable deformation of cohesionless soils".
A.S.C.E., V. 97, SM 2, (1971), p 375-391.

19 COON M.D. et EVANS R.J. "Recoverable deformation of cohesionless soils".
A.S.C.E., V. 97, SM 2, (1971), p 1281-1283.

20 D'APPOLONIA D.J. et LAMBE T.W. "Method for predicting initial settlement".
A.S.C.E., SM 2, Mars 1970, p 523-543.

21 DAVIS E.H. et CHRISTIAN J.T. "Bearing capacity of anisotropic cohesive soil".
A.S.C.E., SM 5, May 1971.

22 DAVIS E.H. et POULOS H.G. "The use of elastic theory for settlement prediction under three-dimensional conditions".
Geotechnique,18, 1968, p 67-91.

23 DAYRE M. "Etude expérimentale de quelques propriétés mécaniques des roches (Elasticité, rupture, anisotropie)".
Thèse, Grenoble, 1963.

24 DE URENA R., PIQUER J.S., MUZAS F., SANZ SARACHO J.M. "Stress distribution in cross-anisotropic media".
1er Congrès Mécanique des Roches, T.1 p 313-317.

25 DOOLEY J.C. Discussion,,Geotechnique 14, 1964, p 278-279.

26 DOUGLASS P.M. et VOIGHT B. "Anisotropy of granites : A reflection of microscopic Fabric".
Géot. 19, n° 3, Sept. 69, p 376-398.

27 DUNCAN J.M. et SEED B. "Anisotropy and stress reorientation in clay".
A.S.C.E., SM 5, Vol. 92, Sept. 66, p 21-50.

28 DUNCAN J.M. "Undrained Strength and Pore-water pressures in anisotropic clays".
Fifth Australia - New-Zealand. Conference on soil Mechanics and Foundation Engineering. 1967, p 68-71.

29 DUNSTAN T. "The influence of grading on the anisotropic strenght of sand".
Geotechnique 22, n° 3, (1972), p 529-532.

30 EL SOHBY M.A. et ANDRAWES K.Z. "Deformation characteristics of granular materials under Hydrostatic compression".
Canadian Geotechnical Journal, 9, 1972, p 338-350.

31 EL SOHBY M.A. et ANDRAWES K.Z. Discussion "Inherent anisotropy in a sand".
Geotechnique 22, n° 3, (1972), p 538-541.

32 FADUM R.E. "Influence values for estimating stresses in elastic foundations".
2e Congrès Mécanique des Sols, Rotterdam, 1948, T. 3, p 77-84.

33 FROELICH O.K. "Druckverteilung im Baugrunde".
Springer Verlag, Wien, 1934, p 183.

34 GERRARD C.M. "Stresses and displacements in layered, Cross-Anisotropic, Elastic Systems".
Fifth Australia - New-Zealand. Conference on Soils Mechanics and Foundation Engineering. 1967, p 187-197.

35 GERRARD C.M. "The analysis of a homogeneous, Cross-Anisotropic Elastic Half Space Undergoing Deformations that possess a vertical plane of Symmetry".
H.R.R. p 282, (1969), p 41-46.

36 GERRARD C.M. et HARRISON W. Jill "Circular loads applied to a Cross-anisotropic Half Space".
Commonwealth Scientific and industrial Research Organisation.
Melbourne Australia, Papier n° 9, (1970).

37 GERRARD C.M. et HARRISON W. Jill "Stresses and displacements in a loaded orthorhombic half Space".
C.S.I.R.O., Paper n° 9, (1970), Melbourne, Australia.

38 GERRARD C.M. Discussion "Stresses and displacements in a cross-anisotropic soil".
Geotechnique 22, n° 2, (1972), p 372-376.

39 GIROUD J.P. "Déplacements provoqués par une force concentrée exercée à la surface du sol".
Le Génie Civil, T. 146, n° 12, Décembre 1969.

40 GIROUD J.P. "Contraintes provoquées par une force concentrée exercée à la surface du sol".
Le Génie Civil, T. 146, n° 12, Décembre 1968.

41 GIROUD J.P. "Commentaires sur l'utilisation de l'élasticité pour les projets de fondations".
IV COBRAMSEF, V. I, T. II, Guanabara, Agosto 1970, p V.1 à V.5.

42 GRESZCZUK L.B. "Effect of material Orthotropy on the directions of principal stresses and strain".
A.S.T.M., S.T.P. 405, 1966, p 1-13.

43 GUTMAN S.G. "Solution of a plane problem of the theory of elasticity for a particular case of orthotropy on an isotropic model".
1er Congrès Mécanique des Roches, T.1, Lisbonne 1966, p 713 à 716.

44 HARDIN B.O. et DRNEVICH V.P. "Shear modulus and damping in soils : Measurement and Parameter effects".
A.S.C.E., SM 6, Vol. 98, Juin 1972.

45 HARRISON W.J., GERRARD C.M. et WARDLE L.J. "Computer programmes for circle and strip loads on layered anisotropic media".
Geomechanics Comparting programme n° 1. Commonwealth Scientific and industrial Research Organisation, Australia 1972.

46 HARRISON W.J. et GERRARD C.M. "Elastic Theory Applied to Reinforced Earth". A.S.C.E., SM 12, Décembre 1972, p 1325-1345.

47 HELENELUND K.V. "Pore pressure measurements in aelotropic peat". Proc. 4th conf. on soil Mechanics. Budapest, 1971, pp 127-134.

48 HODE J. "Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund". Der Bauingenieur, 452, 1939.

49 HOLLINGSHEAD G.W. et RAYMOND G.P. "Field Loading tests on Muskey". Canadian Geotech. Journal, Vol. IV, n° 3, Août 1972, p 278-289.

50 HOLLINGSHEAD G.W. et RAYMOND G.P. "Prediction of Undrained Movements caused by embankments on Muskeg". Canadian Geotechnical Journal, 8, 1971, p 23-35.

51 HOLUBEC I. "Elastic Behavior of cohesionless soil". A.S.C.E., SM 6, Nov. 1968, 6216, p 1215-1231.

52 HOLUBEC I. Discussion "Elastic behavior of cohesionless soil". A.S.C.E., SM 2, V. 96, (1970), p 763-764.

53 INGLES O.G. et LEE I.K. "The influence of initial grain shape and pore anisotropy on strength of brittle soils". Geot. 21, n° 2, 1971, p 143-153.

54 JOSSEAUME H. "Etude des gradients de pression interstitielle créés par le cisaillement rapide d'éprouvettes d'argile dans l'appareil triaxial". Bulletin de Liaison du L.C.P.C. Journées Nationales, Mai 1971, p 66-74.

55 KAWAMOTO T. "On the calculation of the orthotropic elastic properties from the states of deformation around a circular hole subjected to internal pressure in orthotropic elastic medium". 1er Congrès Mécanique des Roches, T. 1, Lisbonne, 1966, p 269-272.

56 KIRKPATRICK W.M. et RENNIE I.A. "Directional properties of consolidated Kaolin" Geotechnique 22, n° 1, (1972), p 166-169.

57 KO H.Y. et SCOTT R.F. "Deformation of sand in shear". A.S.C.E., SM 5, Sept. 1967, p 283-310.

58 KONING H. "Répartition des contraintes dans un massif semi-indéfini, homogène, élastique et anisotrope". 4ème Congrès Mécanique des Sols, Londres 1957, T. 1, p 335-338.

59 LAFEBER D. et WILLOUGHBY D.R. "Morphological and Mechanical anisotropy of a recent beach sand". Proceedings of a symposium held in Perth 1970, p 80-86.

60 LEKHNITSKII S.G. "Theory of elasticity of an Anisotropic Elastic Body". Holden-Day, San Francisco, 1963, Series in Mathematical Physics.

61 Laboratoire de DELFT "De Spanningsverdeling in een homogeen Anisotroop elastisch halfmedium". L.G.M. Mededelingen, n° 2, (Octobre 1960), p 33-51.

62 LO K.Y. "Stability of slopes in anisotropic soils". A.S.C.E., Vol. 91, SM 4, July 1965, p 85-106.

63 LO K.Y. "The Pore Pressure - Strain Relationship of normally consolidated undisturbed clays". Revue Canadienne de Géotechnique, Vol. 6, n° 4, Nov. 1969.

64 LO K.Y. "An approch to the problem of progressive failure". Canadian Geotechnical Journal, 9, (1972), p 407.

65 LUSHNIKOV V.V. et VULIS P.D. "Some résultats of investigating anisotropy of soils by compression and penetration methods". Soil Mechanichs and Foundations Engeenering, Vol. 9, n° 3, May-June 1972.

66 MARIO COLL ALAS "Dilatomètres de sondages".
Symposium international de Mécanique des Roches, Madrid, 1968 p 75-78.

67 MERKLE J.G. et MERKLE D.H. Discussion "Elastic behavior of conhesionless soil".
A.S.C.E., V. 95, SM 5, (1969), p 1276-1280.

68 MICHELL J.H. "The Stress in an Aeolotropic Elastic Solid with an infinite Plane Boundary".
Proceedings of the London Mathemat. Society, Vol. XXXII, p 247-258.

69 MILOVIC D.M. and TOUZOT G. "Bidimensional Stress distribution in an anisotropic Layer of finite thickness".
Geotechnique, Juin 1970, p 198-203.

70 MILOVIC D.M. et TOURNIER J.P. "Contraintes et déplacements dans un milieu anisotrope".
2ème Congrès Mécanique des Roches, Belgrade 1970, p 471-482.

71 MILOVIC D.M. "Stresses in an aelotropic soil produced by a rectangular foundation".
Proc. 4th Conf. on soil Mechanics, Budapest 1971, pp 669-676.

72 MILOVIC D.M. "Stresses and displacements in an anisotropic layer due to a rigid circular foundation".
Geotechnique 22, n° 1 (1972), p 169-174.

73 MITCHELL R.J. "Some deviations from isotropy in a lightly overconsolidated clay".
Geotechnique 22, n° 3 (1972), p 459-467.

74 MORGAN J.R. et GERRARD C.M. "Behavior of Sands under Surface Loads".
A.S.C.E., SM 12, Décembre 1971, p 1675-1699.

75 NIWA Y., KOBAYASHI S. et HIRASHIMA K.I. "Determination of Rock Orthotropy by Water Chamber test".
Symposyium international de Mécanique des Roches, Madrid, 1968.

76 PERES RODRIGUES F. "Anisotropy of granites".
Congrès Mécanique des Roches, T. 3, Lisbonne 1966, p 721-731.

77 PERES RODRIGUES F. et AIRES-BARROS L. "Anisotropy of endogenetic Rocks".
2ème Congrès Mécanique des Roches, T. 1, Belgrade, 1970,
p 161-164.

78 PICKERING D.J. "Anisotropic elastic parameters for soil".
Geotechnique n° 3, 20, (1970), p 271-276.

79 PICKERING D.J. Discussion, Géotechnique 21, n° 2, Juin 1971, p 182-183.

80 PICKERING D.J. Discussion "Anisotropic elastic parameters for soil".
Geotechnique, 22, n° 1, (1972), p 184-185.

81 QUIGLEY R.M. et THOMPSON C.D. "The Fabric of Anisotropically consolidated sensitive marine clay".
Canadian Geotechnical Journal, Vol. III, n° 2, May 1966,
p 61-73.

82 RUNACHER J.M. "La Structure des argiles".
Thèse, Université de Grenoble, 1970.

83 SAADA A.S. "A rheological investigation into the shear behavior of saturated clay soils".
Thèse 1961, Princeton University.

84 SAADA A.S. et ZAMANI K.K. "The mechanical Behavior of cross Anisotropic clays".
Congrès Mécanique des Sols, T. 1, Mexico 1969, p 351-359.

85 SALAMON M.D.G. "Elastic Moduli of a stratified Rock Mass".
Int. Journ. Rock. Mech. Min. Scienc. Vol. 5, 1968, p 519-527.

86 SANGREY D.A., HENKEL D.J. et ESRIG M.I. "The effective stress reponse of a saturated clay soil to repeated loading".
Canadian Geotechnical Journal, 6, (1969), p 241-252.

87 SCHEIDEGGER A. "The Physics of Flow Through Porous media".
University of Toronto Press, 1960.

88 SCHLOSSER F. "Comportement des milieux granulaires".
Bulletin de Liaison des L.P.C. Journées Nationales Mai 1971, p 37-47.

89 SILVEIRA S.E.B. "Statistical Research on Stress-strain Characteristics of a typical Compacted soil under different moulding parameters".
6ème Congrès Mécanique des Sols, T. 1, 364-367.

90 SILVEIRA A. et E.B.S. "Consideraçoes Sôbre a anisotropia transversal en solos compactados".
IV Congresso Brasiliero de Mecânica das Solos E engenharia de Fundaçoes, V.I, T.I, 1970.

91 SKEMPTON A.W. "Horizontal Stresses in an over-consolidated Eocene clay".
5ème Congrès Mécanique des Sols, Vol. 1, Paris 1961, p 351.

92 SUKLJE L. "The equivalent elastic constants of Saturated soils exhibiting Anisotropy and creep effects".
Geotechnique 13, 1963, p 291-309.

93 TAN TJONG KIE "Consolidation and secondary Time effect on homogeneous anisotropic Saturated clay Strata".
5ème Congrès Mécanique des Sols, T. 1, p 367-373.

94 TERZAGHI K. "Mécanique théorique des Sols".
Edition Française (Dunod), p 371 à 375.

95 TSCHEBOTARIOFF G.P. "Soil Mechanics, Foundations and Earth Structures".
New-York, Mc Graw-Hill, 1951, p 655.

96 URIEL A.O. et CANIZO L. "On the elastic anisotropy of soil".
Geotechnique 21, n° 3, Sept. 1971, 262-267.

97 URIEL A.O. Discussion "Anisotropic elastic parameters for soil". Geotechnique 22, n° 3, (1972), p 533-534.

98 WARD W.H., SAMUELS S.G. et BUTLER M.E. "Further studies of the properties of London clay". Geotechnique 9, 2, p 33-58.

99 WESTERGAARD H.M. "A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics : soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets". Contribution to Mechanics of Solids : Stephen Timoshenko anniversary Volume, Macmillan, New-York, 1938.

100 WIENDIECK K. "L'anisotropie des milieux pulvérulents et son influence sur les tassements". Thèse Doct.Ingénieur, Grenoble, 1964.

101 WOLF K. "Distribution of stress in a half-plane and a half-space of anisotropic Material". Zeitschnift für Angewandte Math. und Mech. Vol. 15, 1945, p 249-254.

102 ZUR A. et WISEMAN G. "Pore Pressure During Shear for an anisotropic soil". Congrès Mécanique des Sols, Mexico, T. 1, p 449-454.

ANNEXE

Relations entre les fonctions de BESSEL

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n+1} J_{n+1}(x)\right] = x^{n+1} J_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$J'_n(x) = \frac{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)}{2}$$

$$\frac{n J_n(x)}{x} = \frac{J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)}{2}$$

Intégrales et notations utilisées

$$I_{ij}(r, \psi\beta) = \int_0^\infty J_i(\xi r)\, \xi^j\, e^{-\psi\xi\beta}\, d\xi$$

Cette intégrale apparaît dans l'expression des déformations et contraintes au sein d'un massif semi-infini aélotrope sous une charge concentrée.

Ses valeurs pour i = 0 et 1 sont :

$$I_{0j}(r, x) = (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}\right]$$

$$I_{1j}(r, x) = -(-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right]$$

Nous avons établi la formule de récurrence suivante, permettant le calcul de I_{ij} $\forall i, j$

$$I_{i+1,j} = \frac{2i}{r} I_{i,j-1} - I_{i-1,j}$$

Ses dérivées, par rapport à r et z, peuvent être calculées par :

$$\frac{\partial}{\partial r} I_{ij} = I_{i-1,j+1} - \frac{i}{r} I_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} I_{ij} = -\psi I_{i,j+1}$$

Nous avons également utilisé les intégrales suivantes :

$$C_{ij}(r, \alpha z, \beta z) = \int_0^\infty J_i(\xi r) e^{-\alpha \xi z} \xi^j \cos \beta \xi z \, d\xi$$

$$S_{ij}(r, \alpha z, \beta z) = \int_0^\infty J_i(\xi r) e^{-\alpha \xi z} \xi^j \sin \beta \xi z \, d\xi$$

Les formules de récurrence sont :

$$C_{i+1,j} = \frac{2i}{r} C_{i,j-1} - C_{i-1,j}$$

et

$$S_{i+1,j} = \frac{2i}{r} S_{i,j-1} - S_{i-1,j}$$

Les dérivées se calculent par :

$$\frac{\partial}{\partial r} C_{ij} = C_{i-1,j+1} - \frac{i}{r} C_{i,j}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} S_{ij} = S_{i-1,j-1} - \frac{i}{r} S_{i,j}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} C_{ij} = -\alpha C_{i,j+1} - \beta S_{i,j+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} S_{ij} = -\alpha S_{i,j+1} + \beta C_{i,j+1}$$

Pour les premières valeurs de i et j, ces intégrales valent :

$$C_{oo} = \frac{\cos x}{\gamma Y} \qquad S_{oo} = \frac{\sin x}{\gamma Y}$$

$$C_{o1} = \frac{\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x}{\gamma^2 Y^3}$$

$$S_{o1} = \frac{\alpha \sin 3x - \beta \cos 3x}{\gamma^2 Y^3}$$

$$C_{10} = \frac{Y - \alpha \cos x - \beta \sin x}{r Y}$$

$$S_{10} = \frac{-\alpha \sin x + \beta \cos x}{r Y}$$

avec

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + \frac{r^2}{\gamma^2}}$$

$$Y = \frac{\gamma}{r}\left[\left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right)^2 + 4\alpha^2\beta^2\right]^{\frac{1}{4}}$$